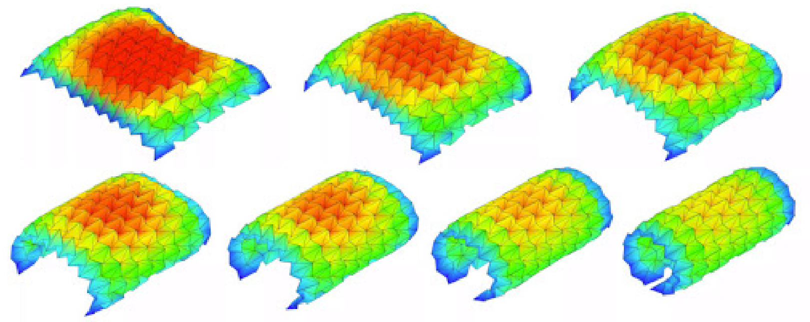
Origamis transformables

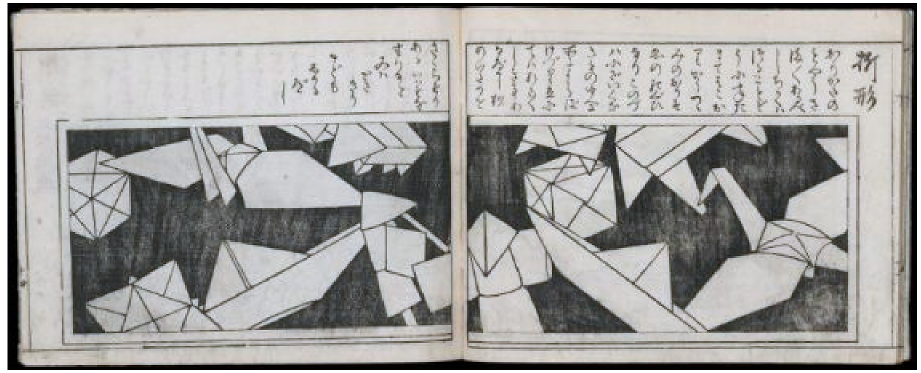


Jacky Cresson

Laboratoire de Mathématiques
Et
Leurs applications

UMR CNRS 5142

Université de Pau et des Pays de l'Adour



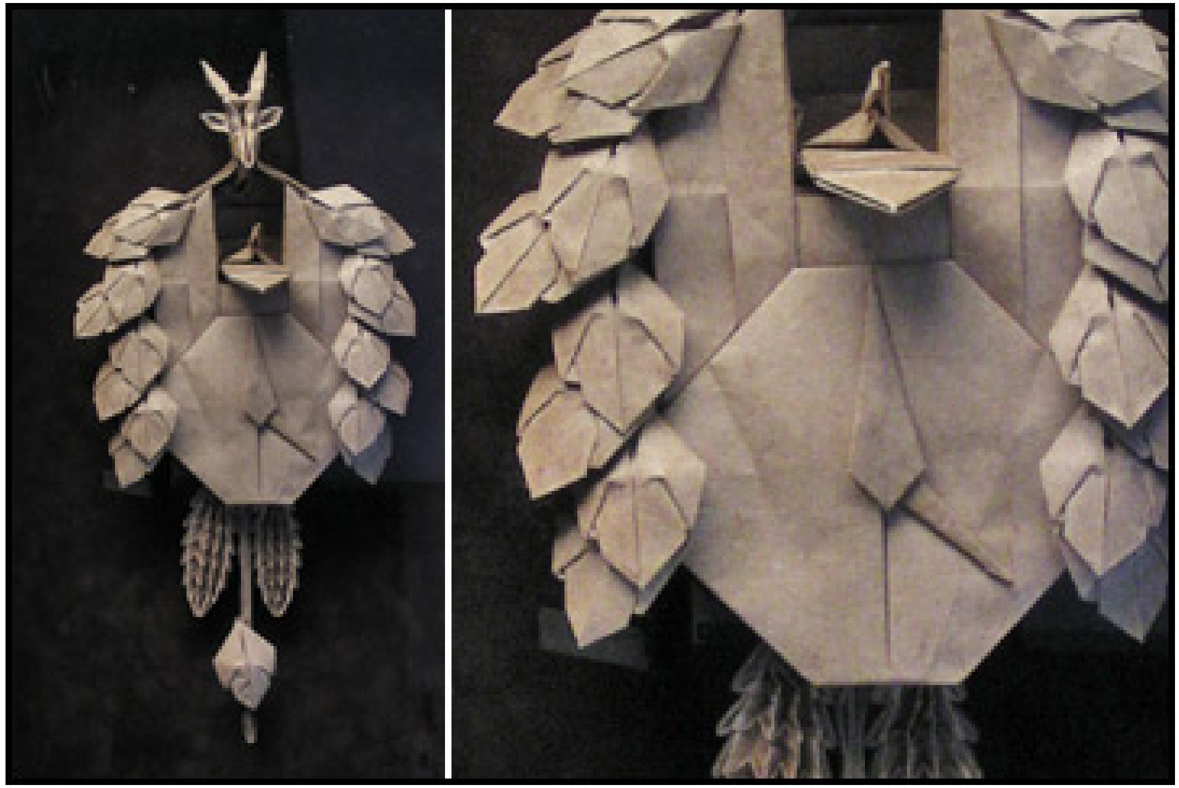
折り紙

Origami = art du pliage en japonais

Que viennent faire les **mathématiques** dans cet art ?

Avant le développement de l’origami mathématique,
on savait faire par exemple ça….

Ce qui est déjà très joli ! Mais voila ce que nous sommes capables de réaliser maintenant...



Black Forest Cuckoo Clock, opus 182
One uncut 1x10 rectangle of Zanders 'elefantenhaut' paper

Diagrams: Origami Design Secrets, Robert Lang

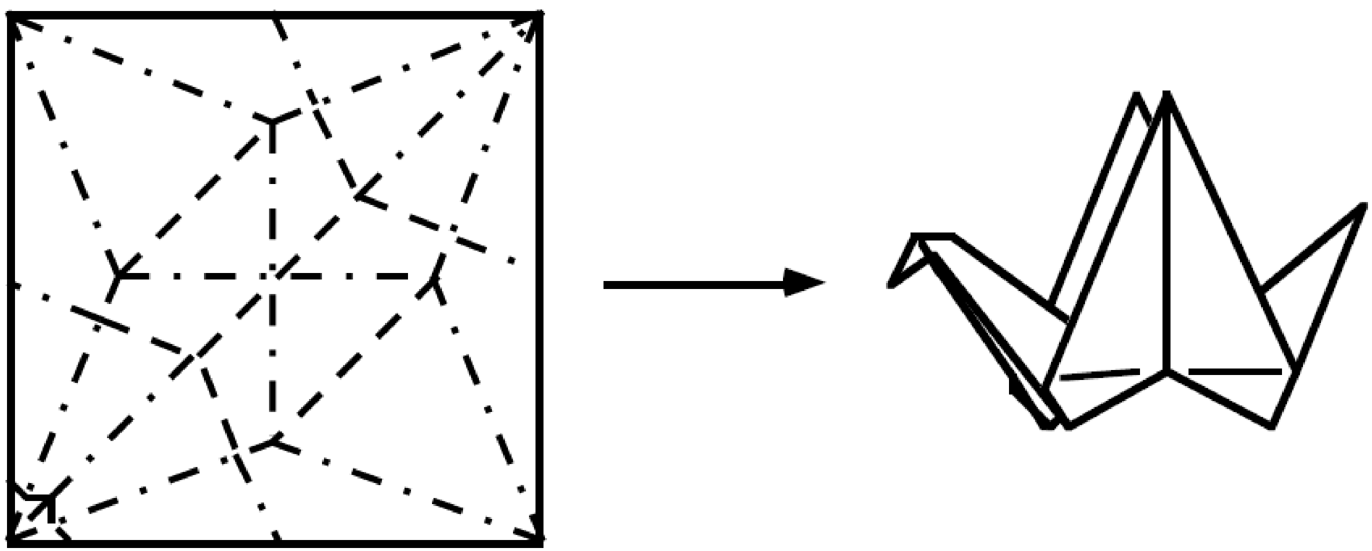
Ou encore….

The organist créé par Robert Lang

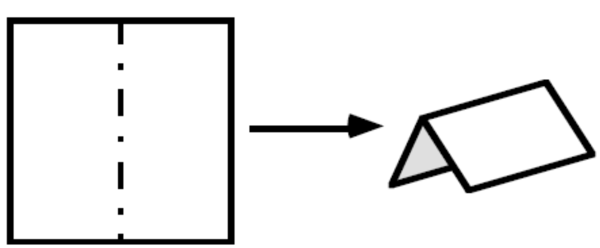
Oui….nous parlons bien d'une feuille de papier pliée,
Sans collages ou découpes d'aucune sorte !

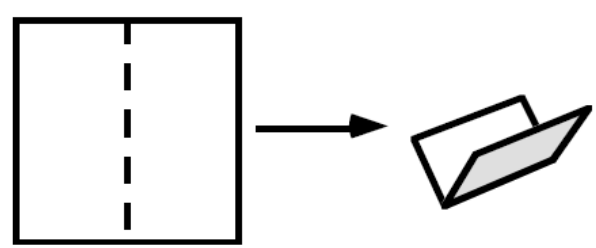
Pour faire un pliage, nous avons besoin du **canevas** ou **diagramme** du pliage.

Celui-ci se présente comme l'**ensemble des marques de plis** obtenus en dépliant le pliage. Par exemple, pour le pliage traditionnel de la grue, nous avons



où on distingue les plis « montagne » des plis « vallée ».



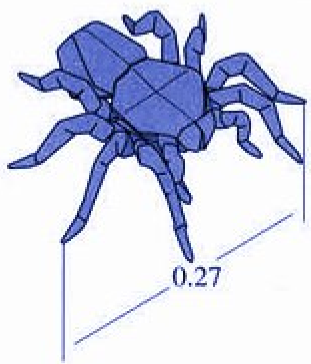


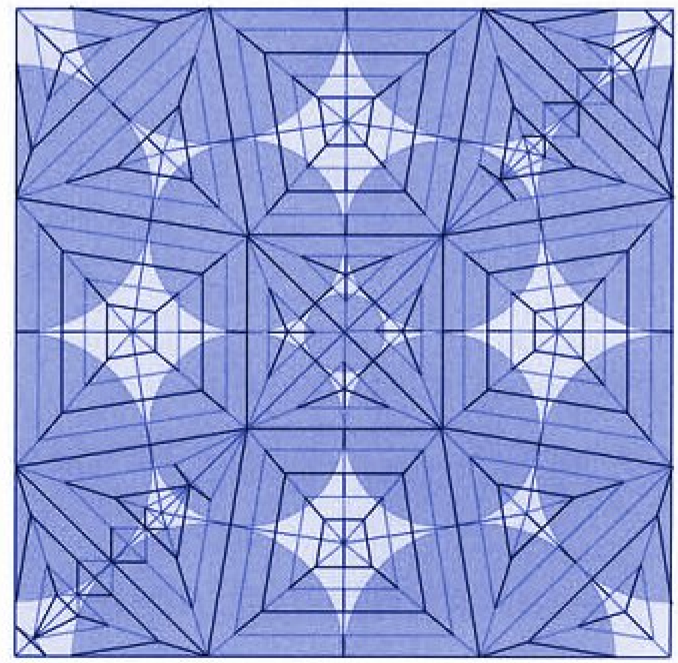
Une question est alors de savoir s'il est possible
de **générer ces diagrammes** pour obtenir une forme donnée.

Par exemple, une araignée ?

C’est possible et voici le canevas !

Although it is well-known that spiders have eight legs, tarantulas appear to break this rule, as they have two additional appendages near the mouth, called pedipalps, that resemble a tenth pair of legs. I am particularly fond of this model because the eight true legs are quite long and of uniform thickness.

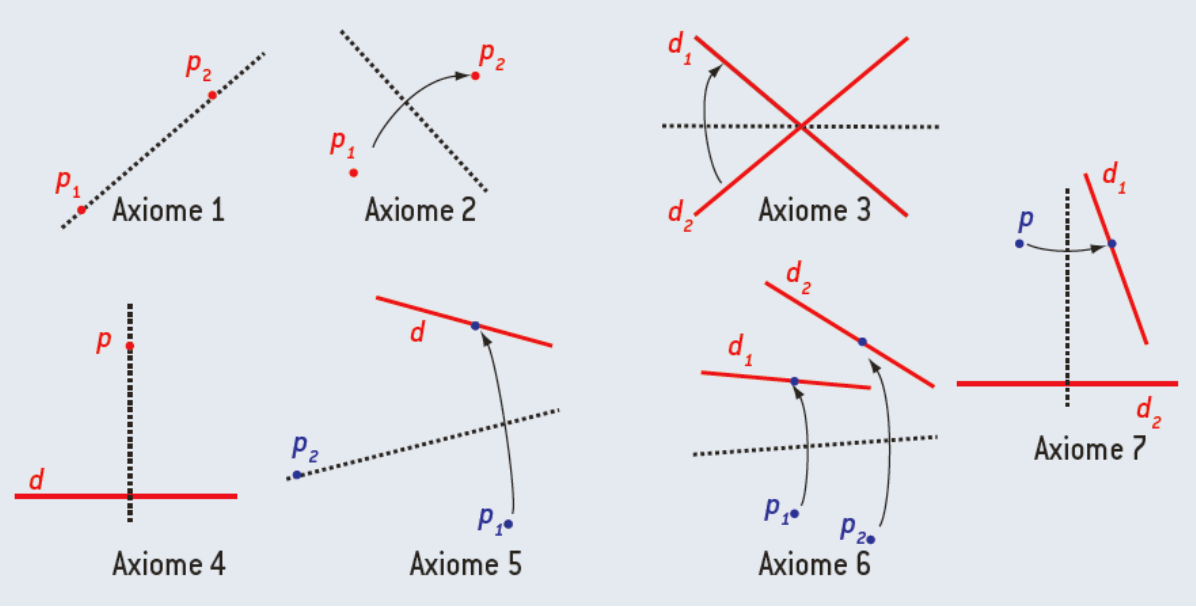




R. Lang, *Origami design secrets, Mathematical methods for an ancient art*, CRC Press, 2d Edition, 2012.

Et les mathématiques dans tout ça ?

Pour générer ces canevas, les **techniques de pliages** ont été formalisées sous la forme d'**axiomes** par **Jacques Justin en 1986** et plus tard redécouverts par les **mathématiciens japonais Humiaki Huzita et Khoshiro Hatori en 2002.** Les 7 plis élémentaires sont les suivants **:**



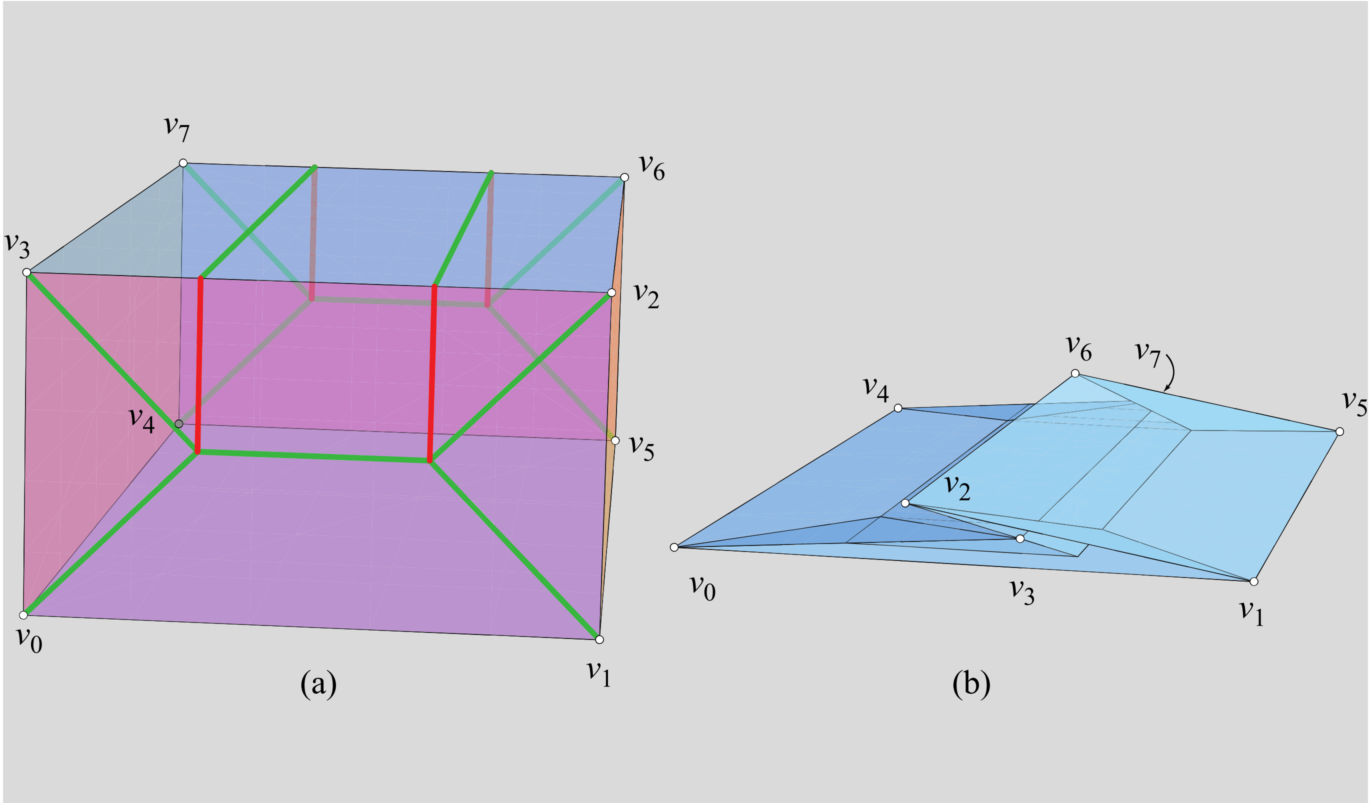
Conséquences mathématiques : Résolution par origami de la

- Duplication du cube
- Trisection d'un angle
- Recherche des solutions d'une équation du troisième degré à coefficients entiers

J-P. Delahaye, *Les mathématiques de l'origami*, Pour la Science no. 448, 2015

Notre problème : *Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir un pliage plat en un sommet du diagramme*

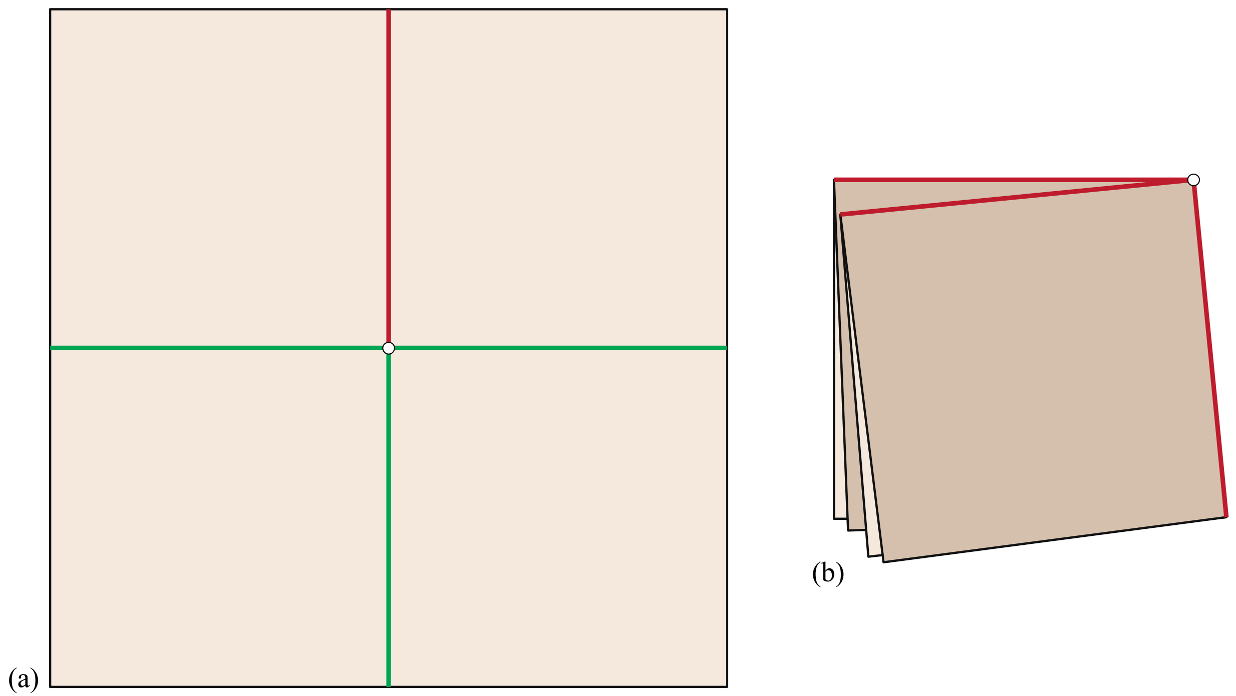
Pourquoi ? Permettre de transformer des structures comme, par exemple, être capable de mettre à plat un volume.



J. O'Rourke, *How to fold it, The mathematics of linkages, origami, and polyhedra*, Cambridge University Press, 2011, Figure 5,14, p.82.

Propriété 1

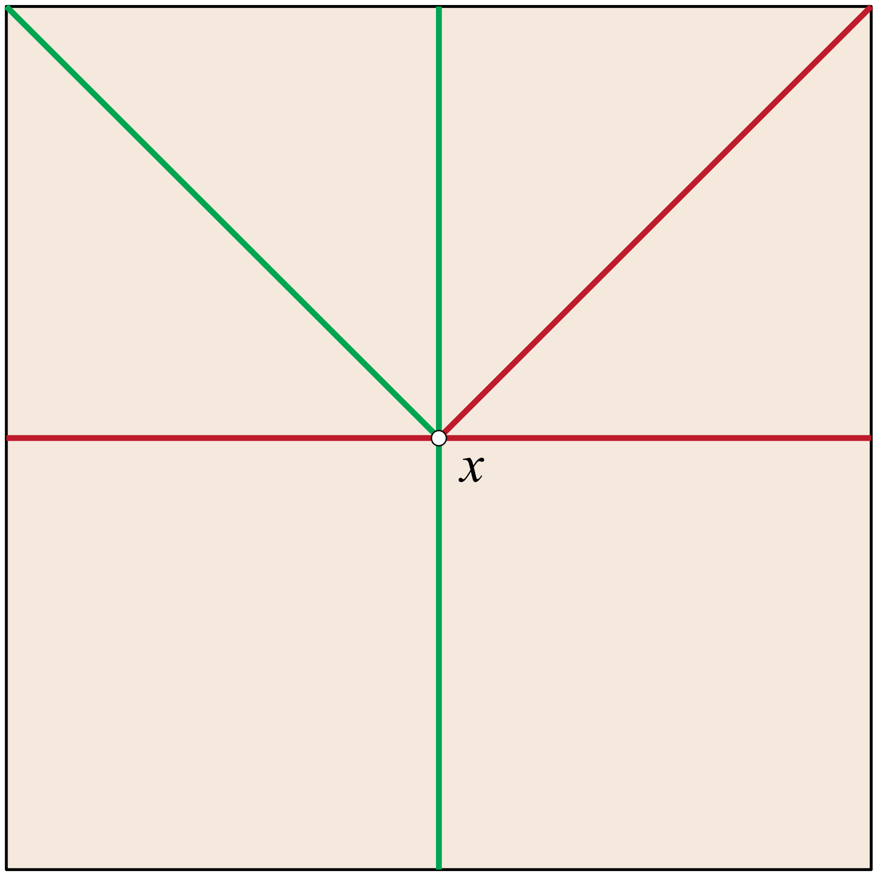
Théorème du degré pair. *Un canevas d'un pliage plat a chacun de ses sommets de degré pair, le degré étant le nombre d'arêtes partant du sommet .*



(a) Un sommet de degré 4. (b) Le pliage plat associé.

J. O'Rourke, *How to fold it, The mathematics of linkages, origami, and polyhedra*, Cambridge University Press, 2011, Figure 4.3, p.59.

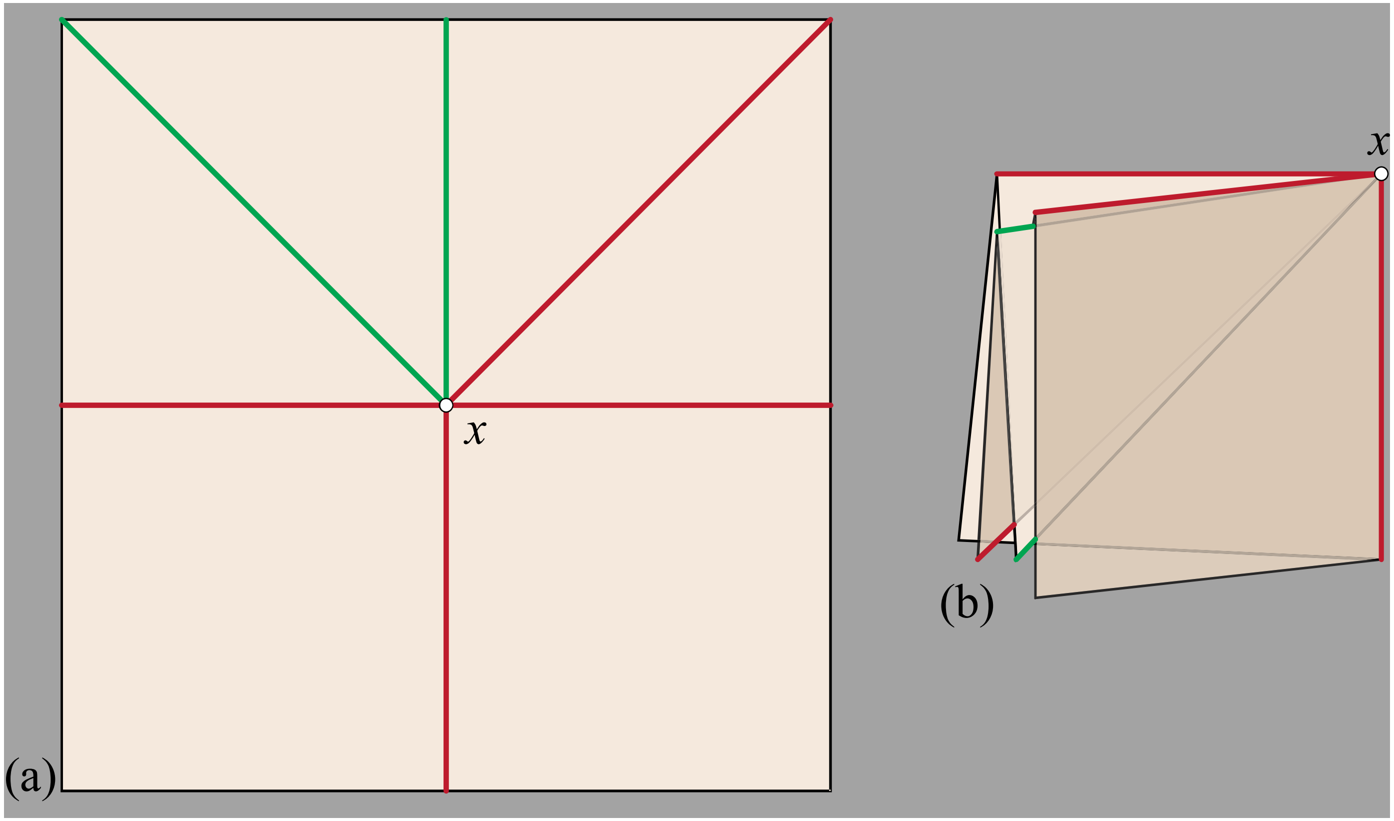
Cette condition est nécessaire mais non suffisante !



(a) Un pliage impossible.

J. O'Rourke, *How to fold it, The mathematics of linkages, origami, and polyhedra*, Cambridge University Press, 2011, Figure 4.3, p.59.

Il y a quelque chose à comprendre puisque si l’on change seulement l’assignation d’une arête…..

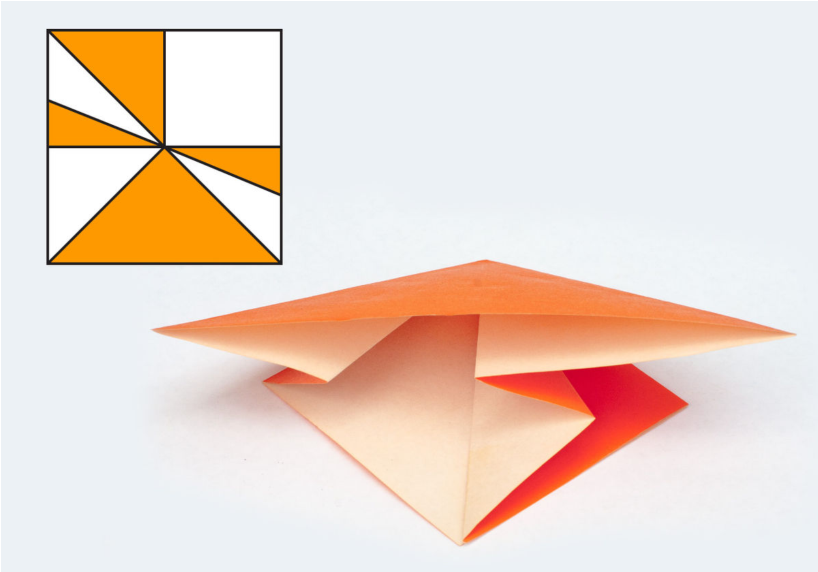


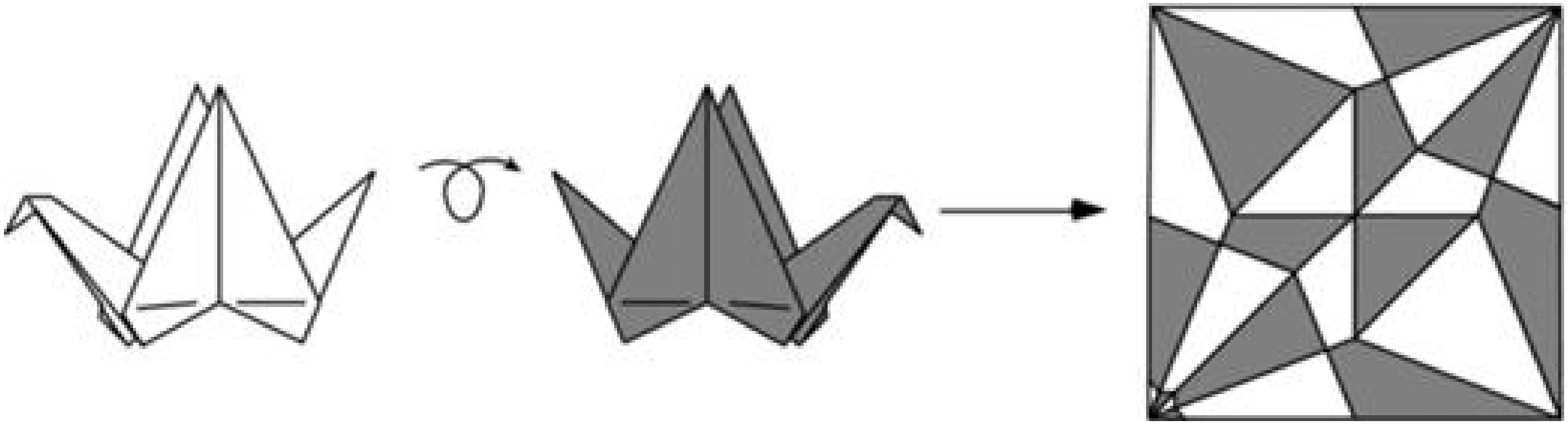
J. O’Rourke, *How to fold it, The mathematics of linkages, origami, and polyhedra*, Cambridge University Press, 2011, Figure 4.4, p.59.

…. on obtient un pliage plat réalisable !

Propriété 2

Corollaire. Le canevas d'un origami pliable à plat est 2-colorable.



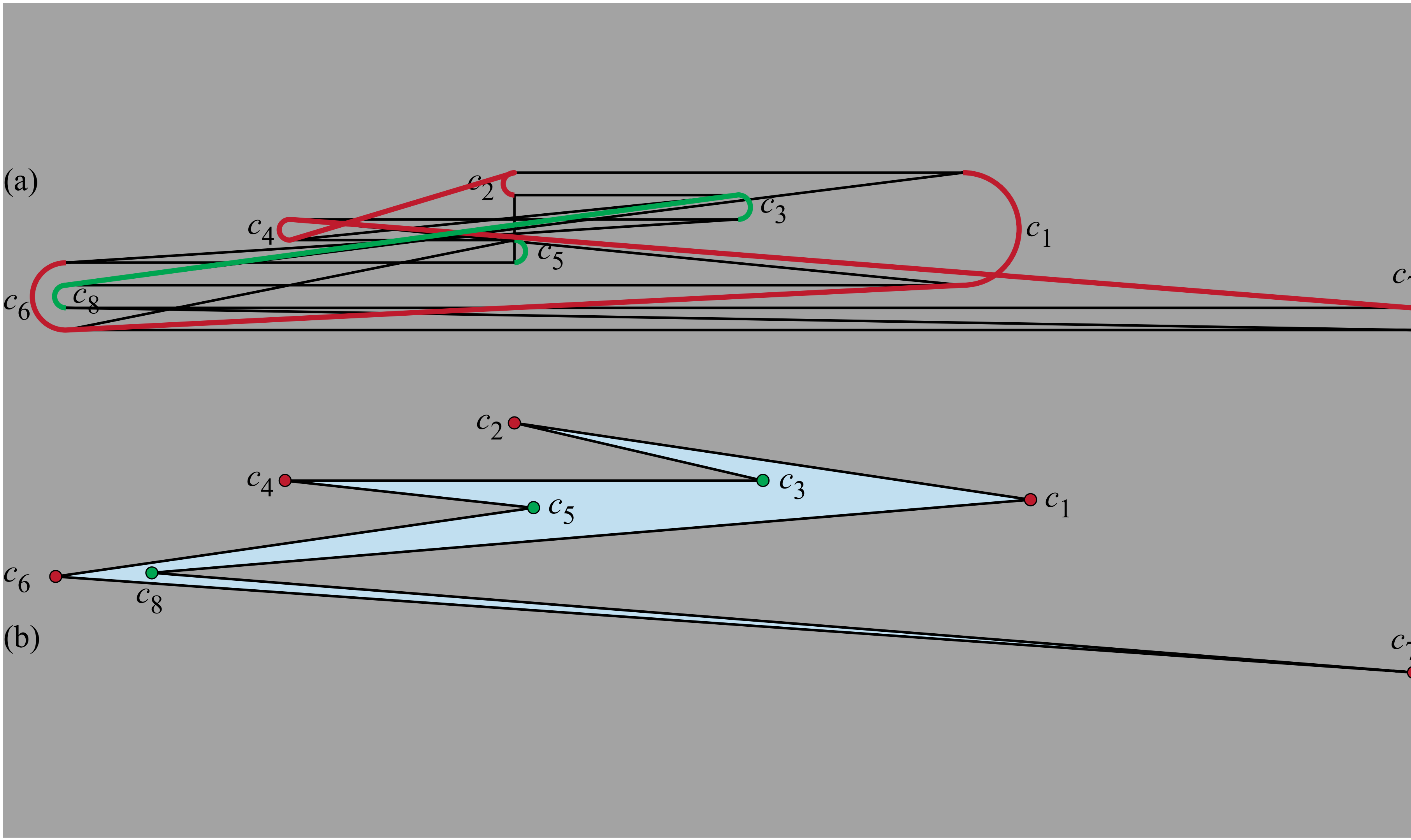


La démonstration du *théorème du degré pair* est un corollaire d'un théorème plus général appelé *Théorème de Maekawa-Justin* :

Théorème de Maekawa-Justin. Soit M le nombre de plis montagne et V le nombre de plis vallée qui se rencontrent à un sommet d'un pliage plat, alors M et V diffèrent de 2, i.e. soit $M=V+2$ ou $M=V-2$.

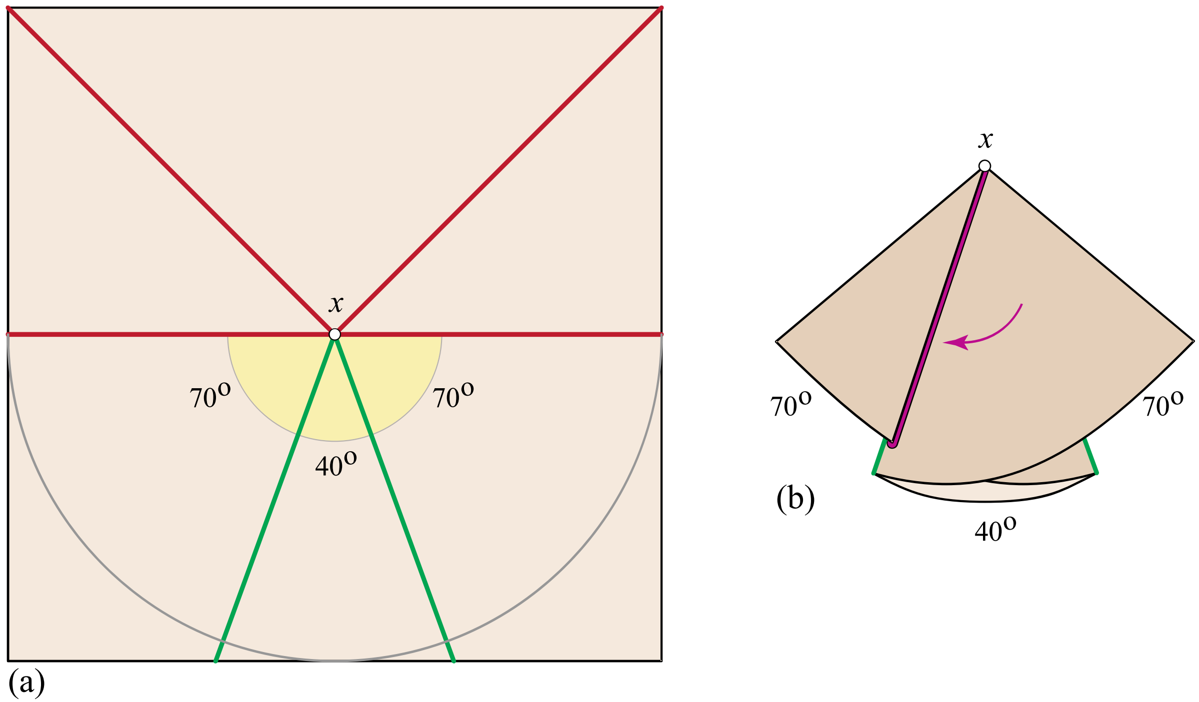
La démonstration pour le théorème du degré pair suit alors : supposons que $M=V+2$ alors en un sommet on aura $M+V=2V+2$, donc un nombre pair de plis. Le cas $M=V-2$ se traite de la même façon.

Passons à la démonstration du théorème de Maekawa-Justin.



(a)
c_1
c_2
c_3
c_4
c_5
c_6
c_7
c_8
(b)
c_1
c_2
c_3
c_4
c_5
c_6
c_7
c_8

Le théorème du minimum local



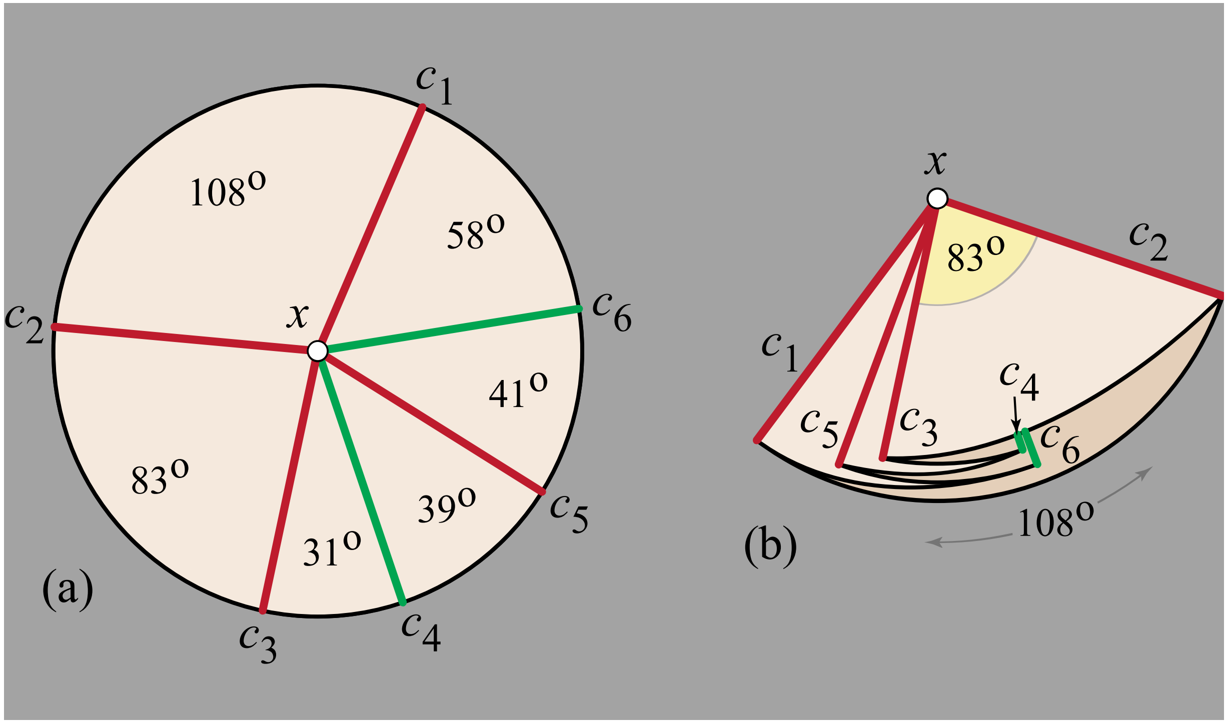
J. O'Rourke, *How to fold it, The mathematics of linkages, origami, and polyhedra*, Cambridge University Press, 2011, Figure 4.10, p.65.

Théorème du minimum local. *Dans un pliage plat, tout coin dont l'angle est un minimum local doit être bordé par un pli montagne et un pli vallée.*

Propriété 3. Le théorème de Kawasaki-Justin

Le théorème précédent peut se généraliser.

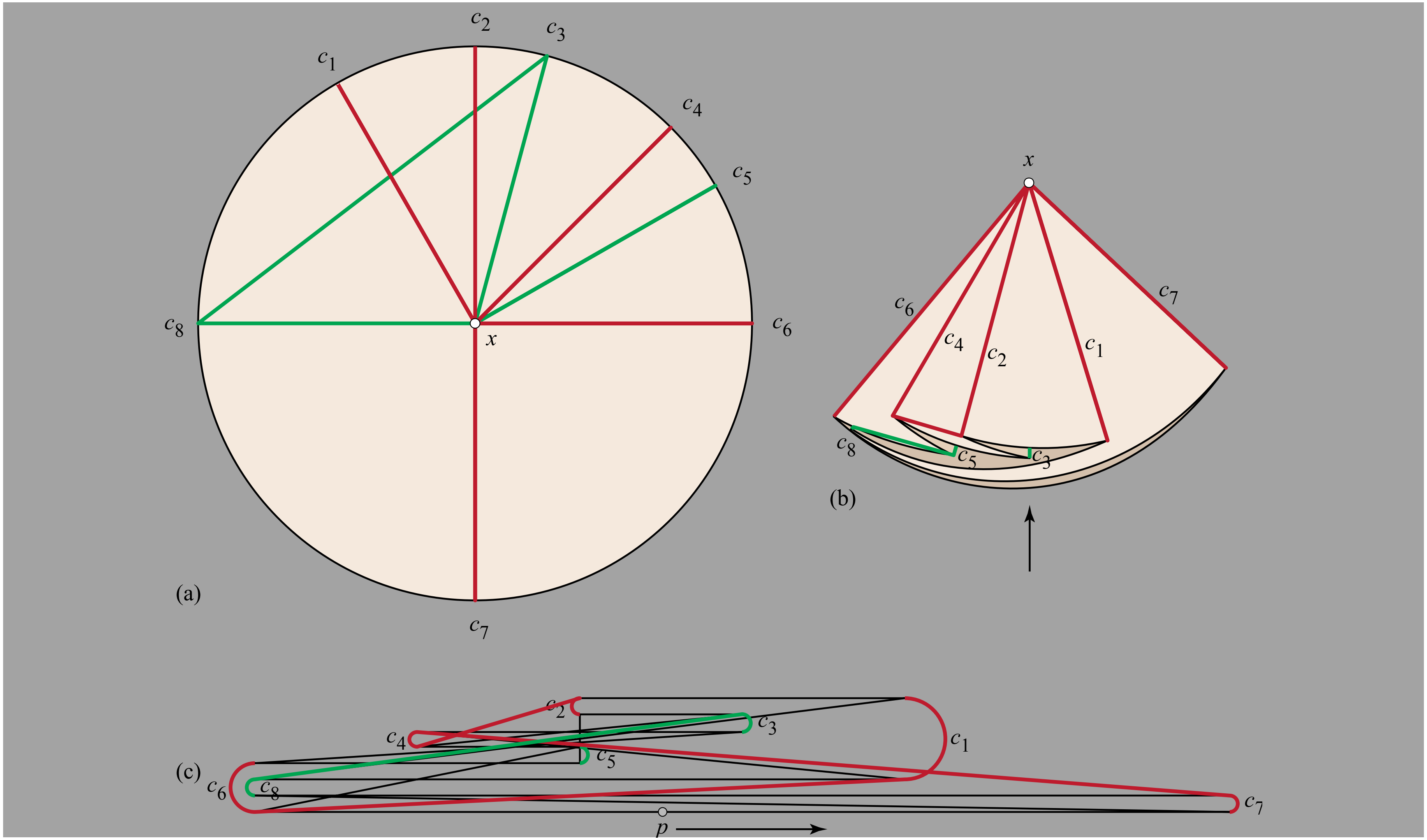
Théorème de Kawasaki-Justin. *Un ensemble pair de plis en un sommet est pliable à plat si et seulement si la somme alternée des angles est nulle.*



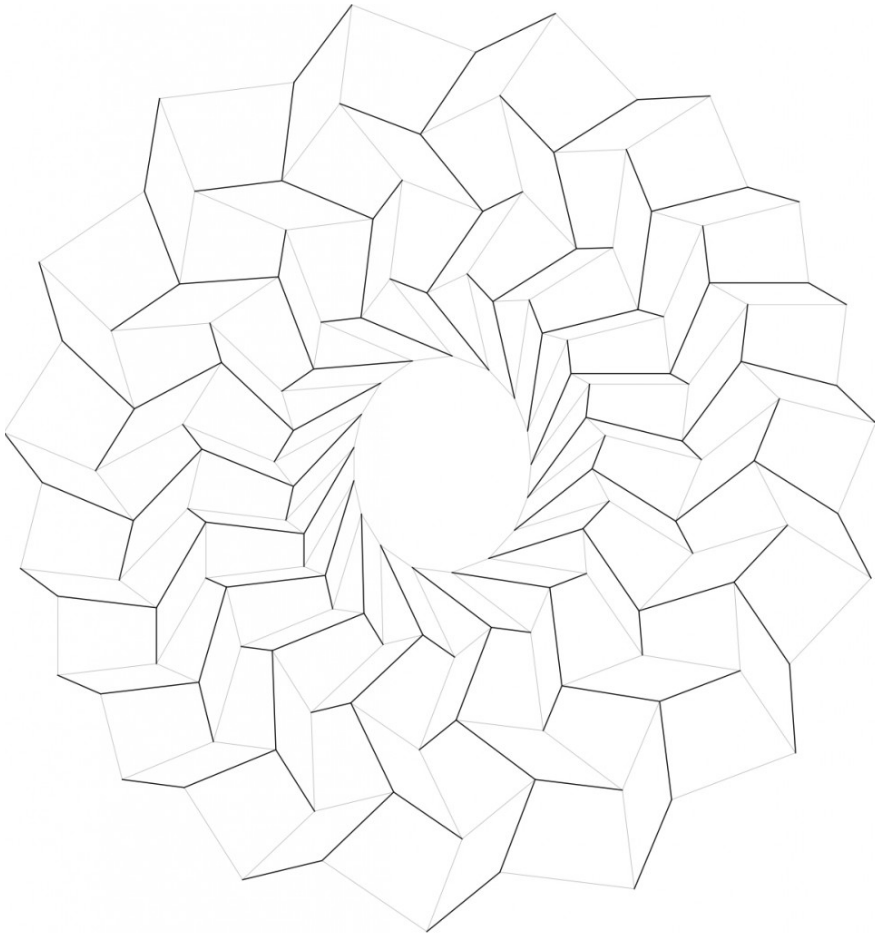
J. O'Rourke, *How to fold it, The mathematics of linkages, origami, and polyhedra*, Cambridge University Press, 2011, Figure 4.12, p.67.

On a bien 31°+41°+108°=39°+58°+83°

Démonstration du théorème de Kawasaki-Justin



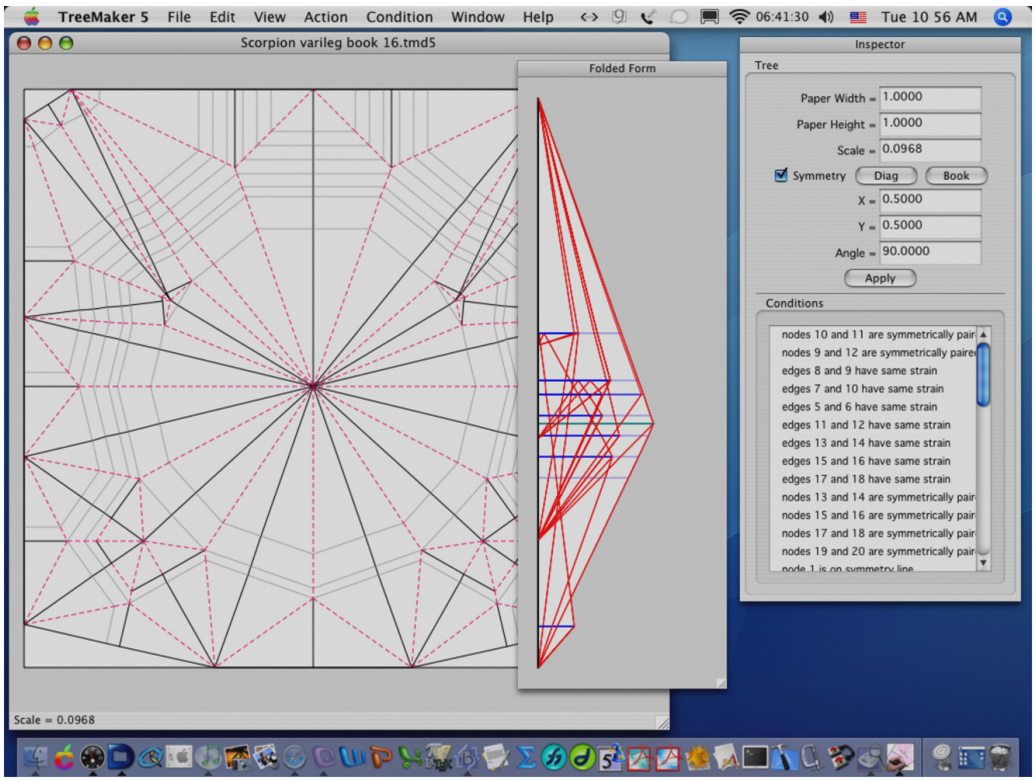
On peut utiliser ce théorème pour créer des pliages de complexité importante et qui pourtant sont plats !



Oval tessellation par Robert Lang, 1999.

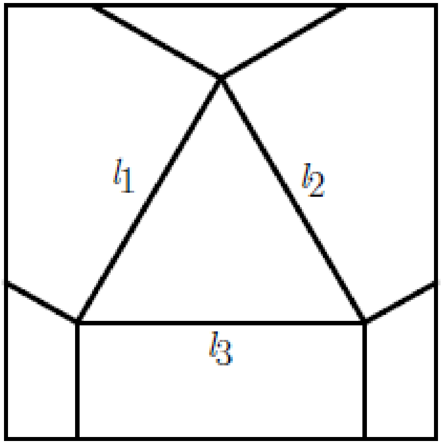
Comment ces pliages ont-ils été réalisés ?

Le **canevas** du pliage est généré par le logiciel *Treemaker* mis au point par le physicien **Robert Lang** de l'université de Stanford.



Quelques problèmes…..

P1. On se donne un canevas vérifiant les 3 propriétés précédentes. Est-il pliable à plat ?



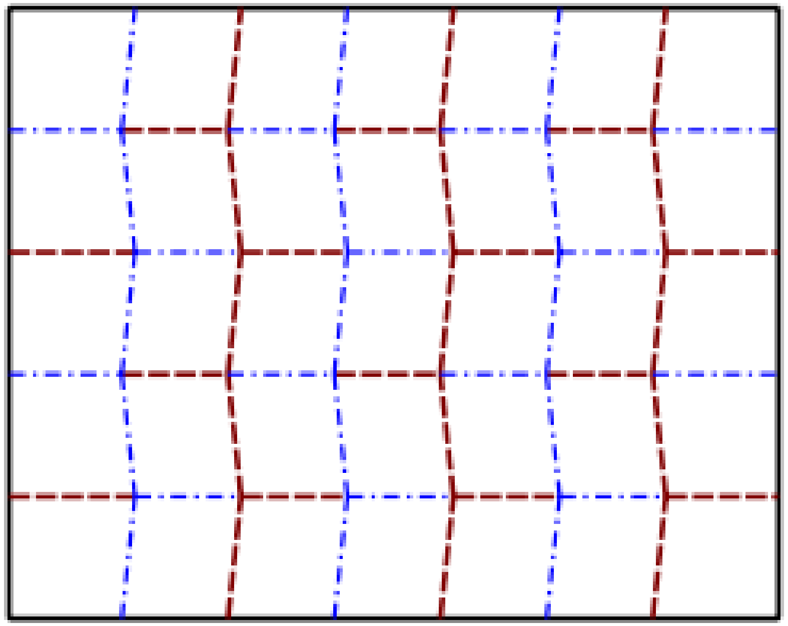
Non ! Exemple de Thomas Hull dans *On the mathematics of flat origamis*, Congressus numerentium , Vol. 100 (1994), pp. 215-224.

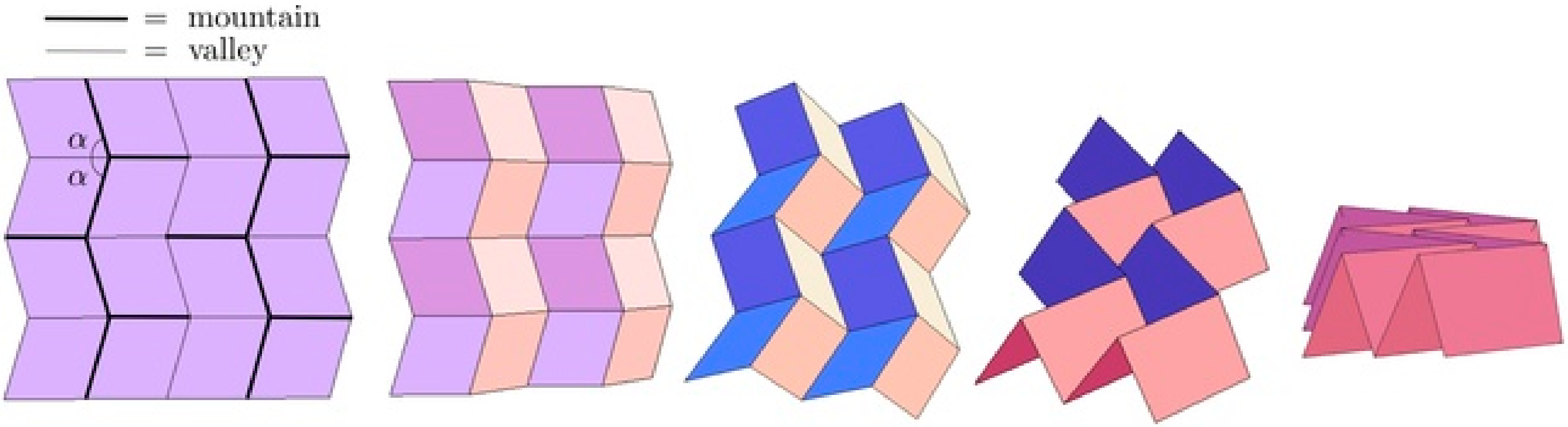
P2. On se donne un canevas vérifiant les trois propriétés précédentes et avec en chaque sommet une assignation telle que le pliage soit localement plat. Peut-on *facilement* décider si le canevas est pliable globalement à plat ?

Non ! M. Bern et B. Hayes ont démontré dans *Complexity of flat origamis* (Proceeding of 7th annual ACM-SIAM *Symposium on discrete algorithms*, Atlanta, 1996, pp. 175-183) que décider si un canevas est globalement pliable à plat est un problème NP-hard….

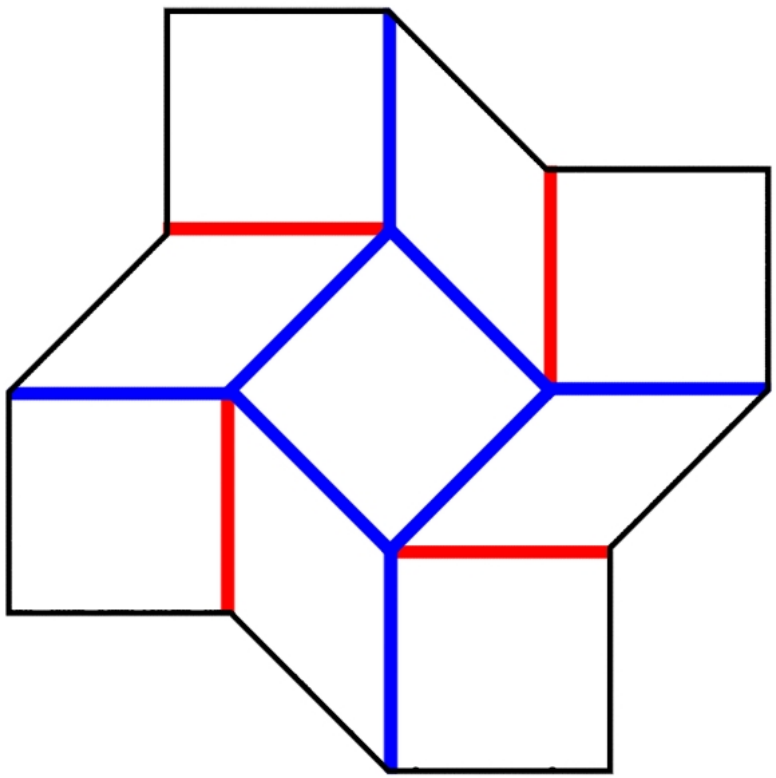
Quelques pliages plats permettant le mouvement

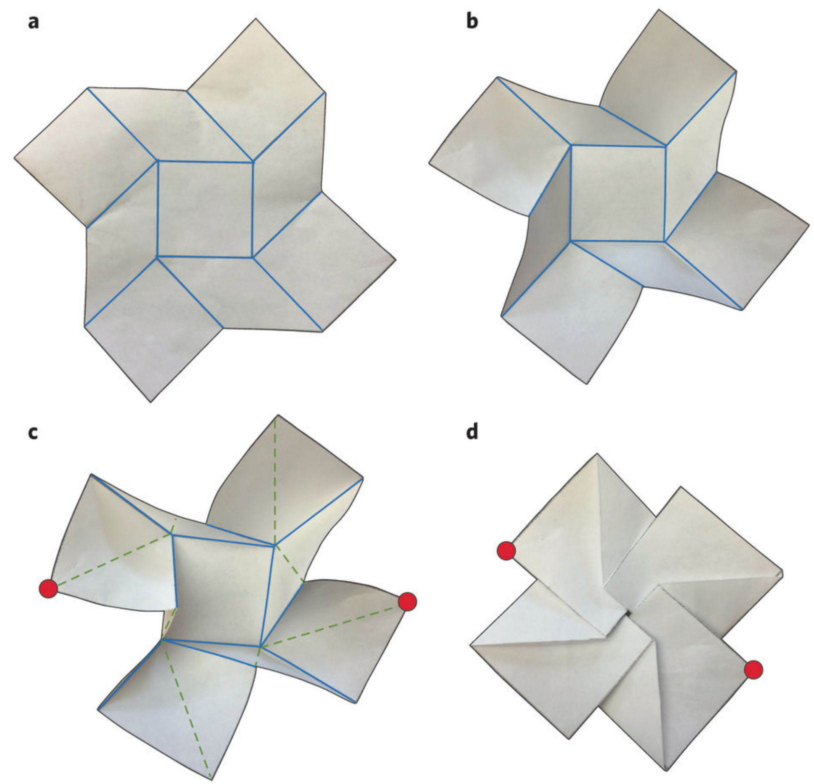
Pliage de Koryo Miura

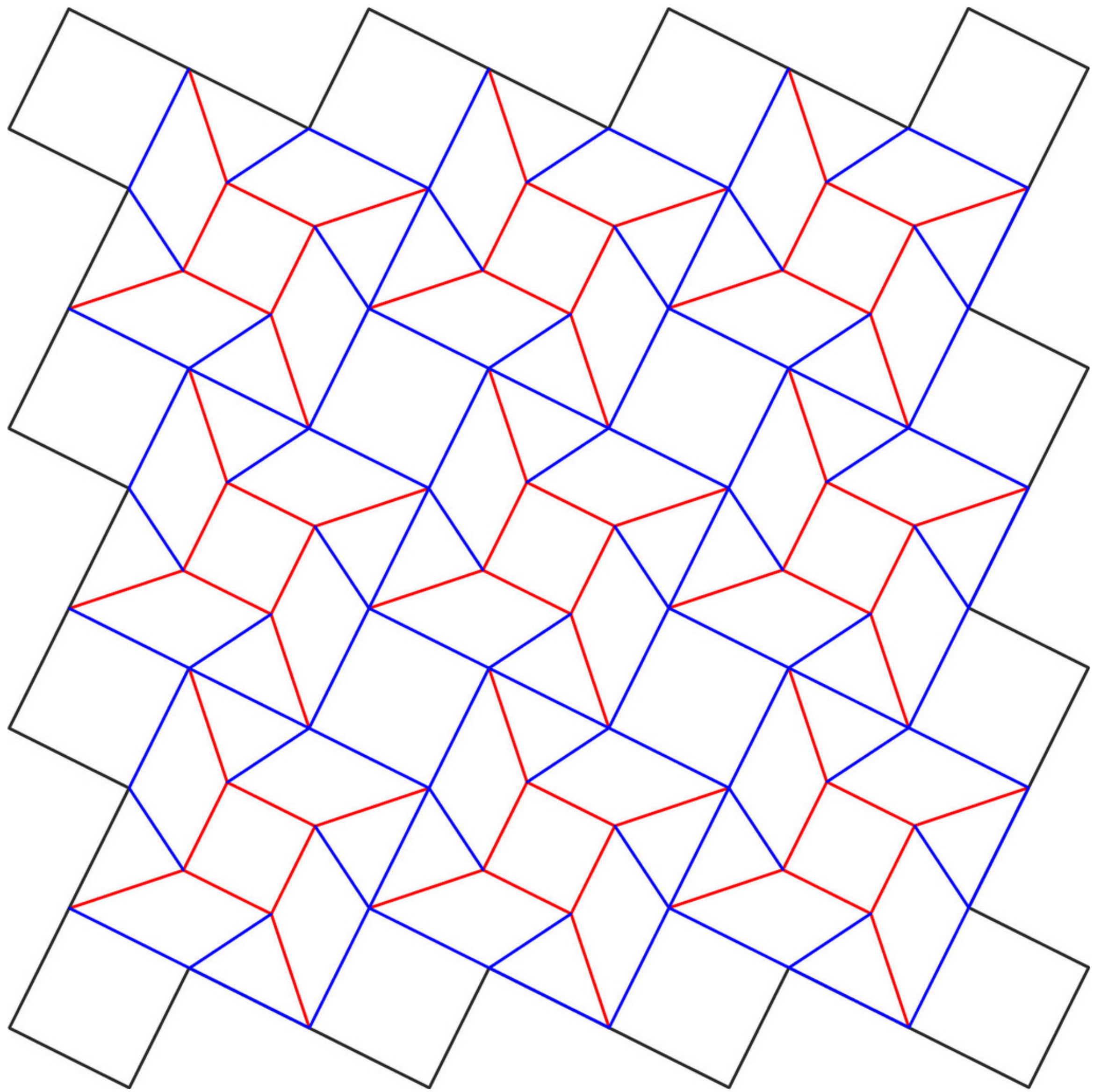


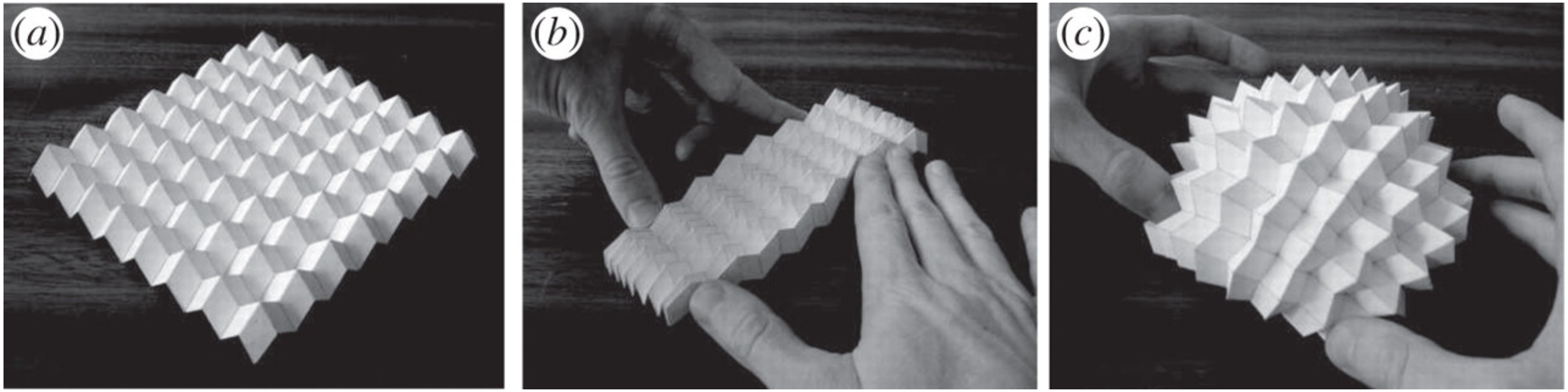


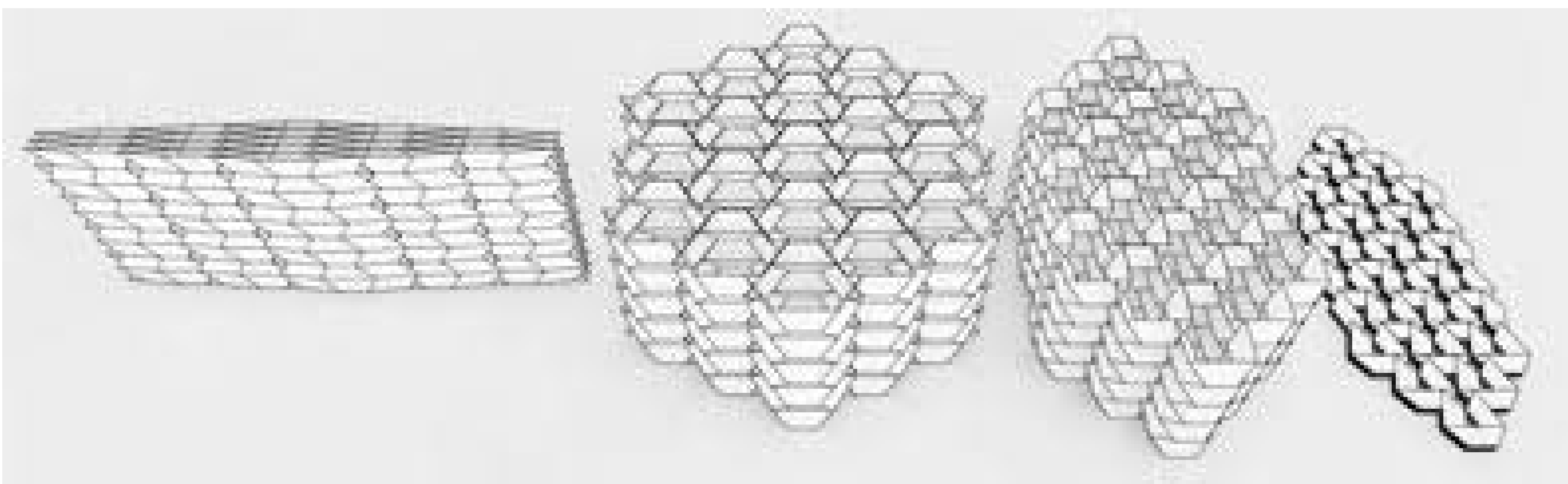
Le carré tournant
(square twist)

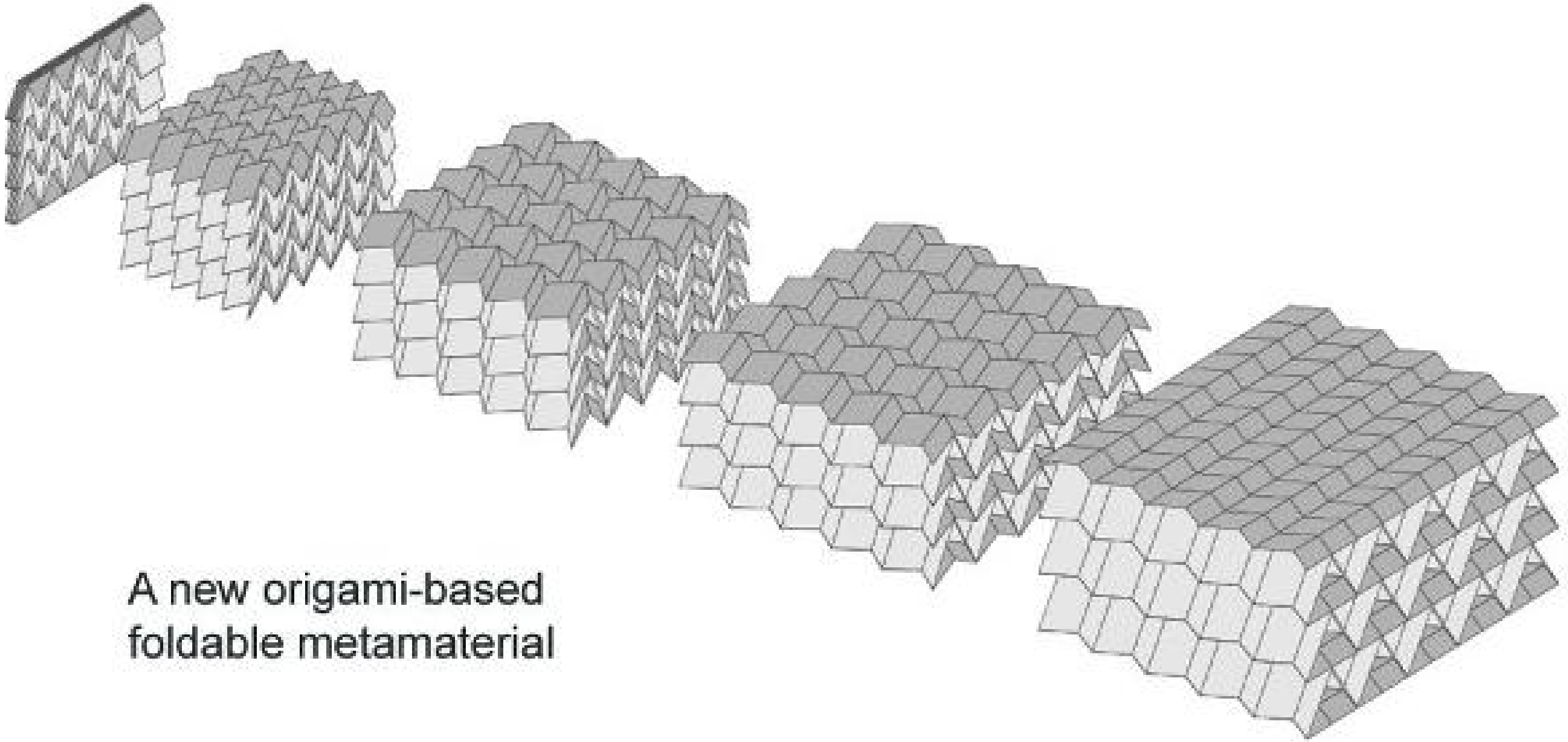




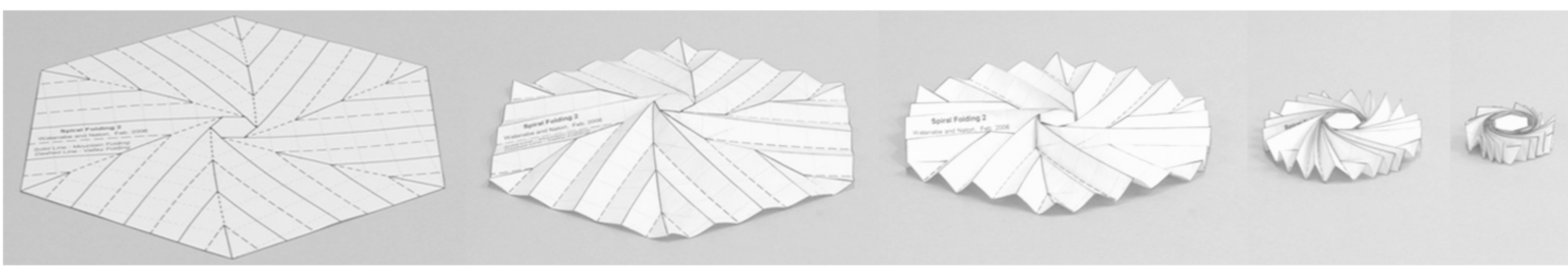



(a)
(b)
(c)

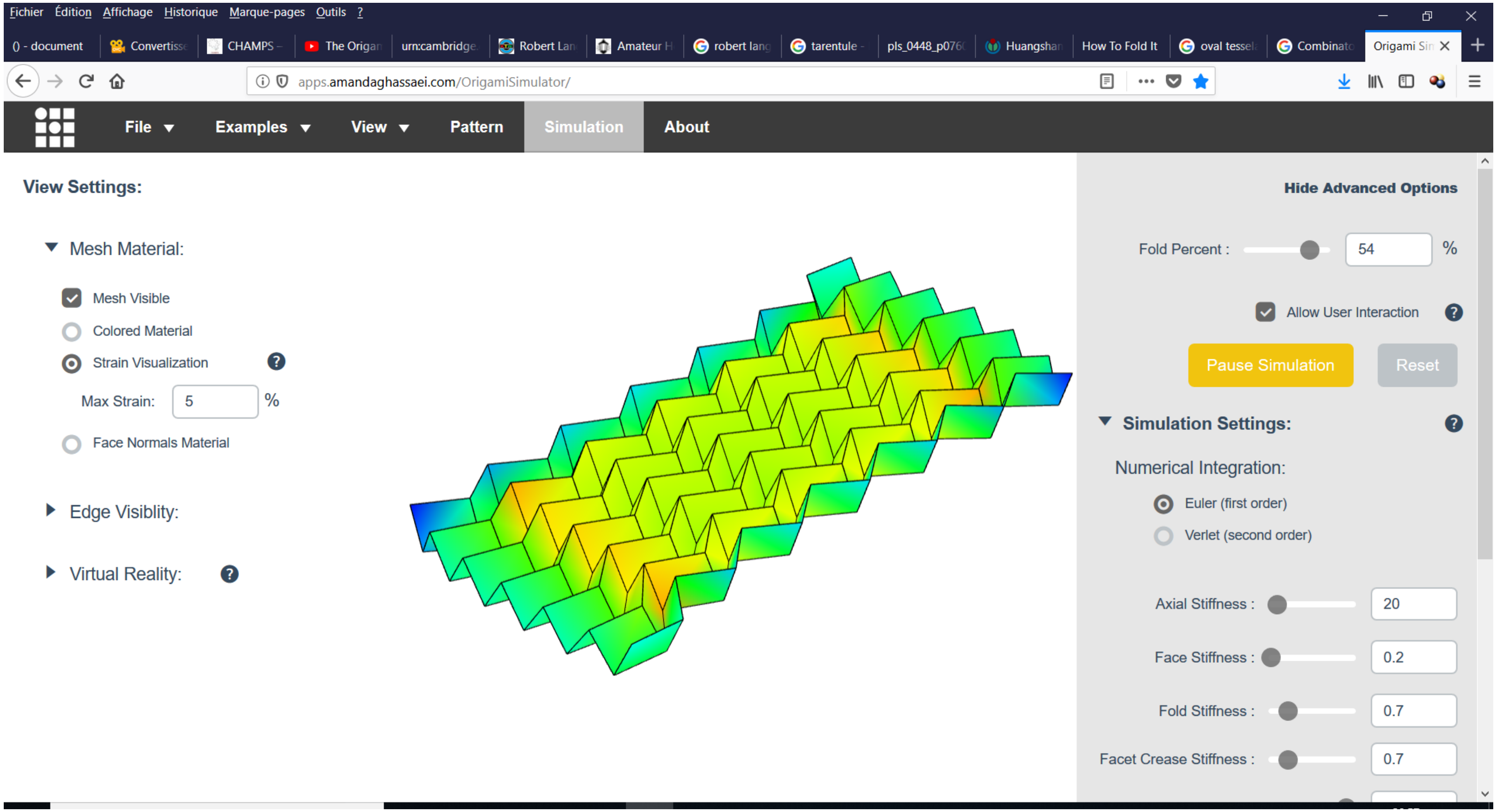




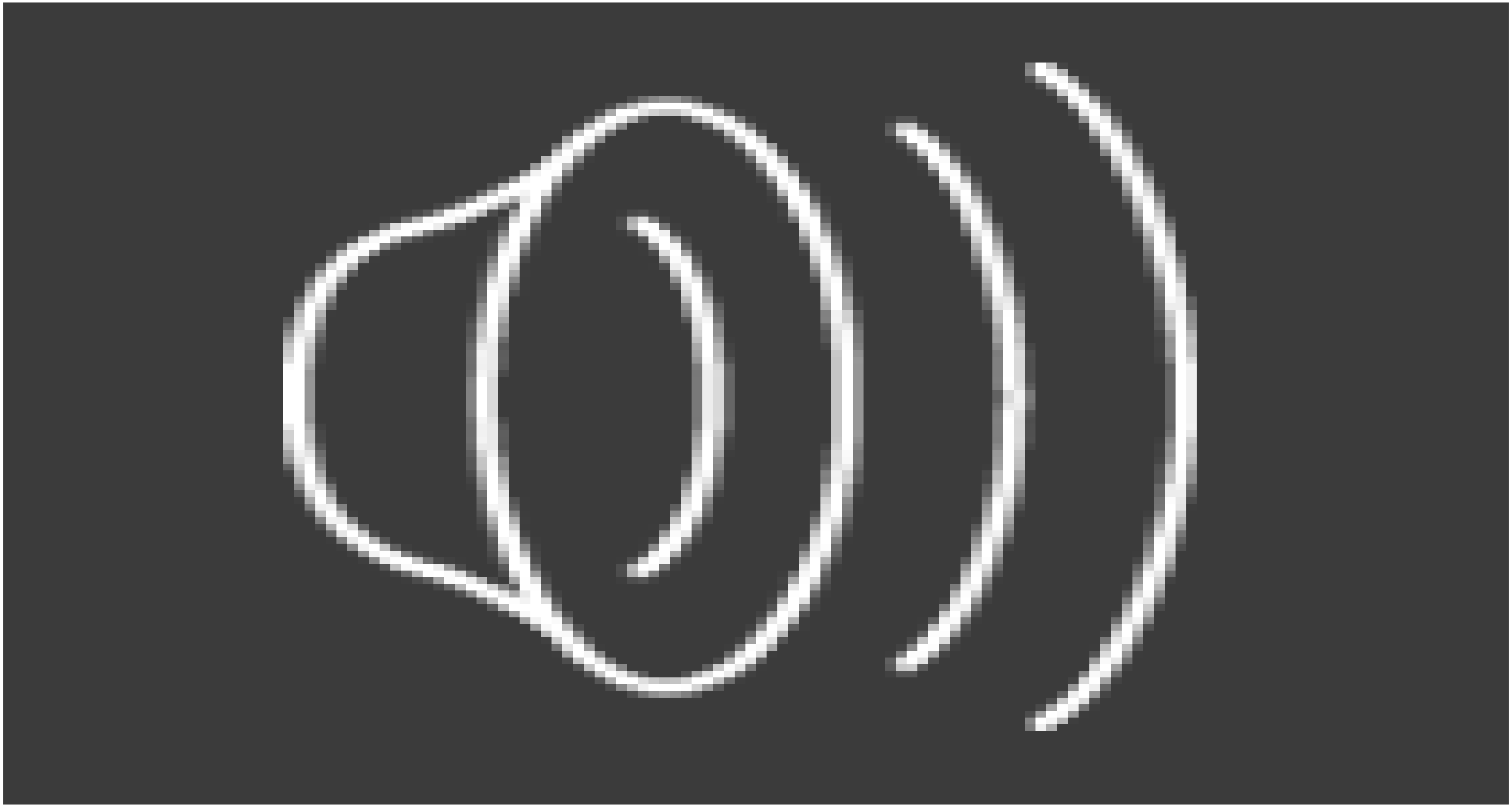
A new origami-based
foldable metamaterial



https://origamisimulator.org/

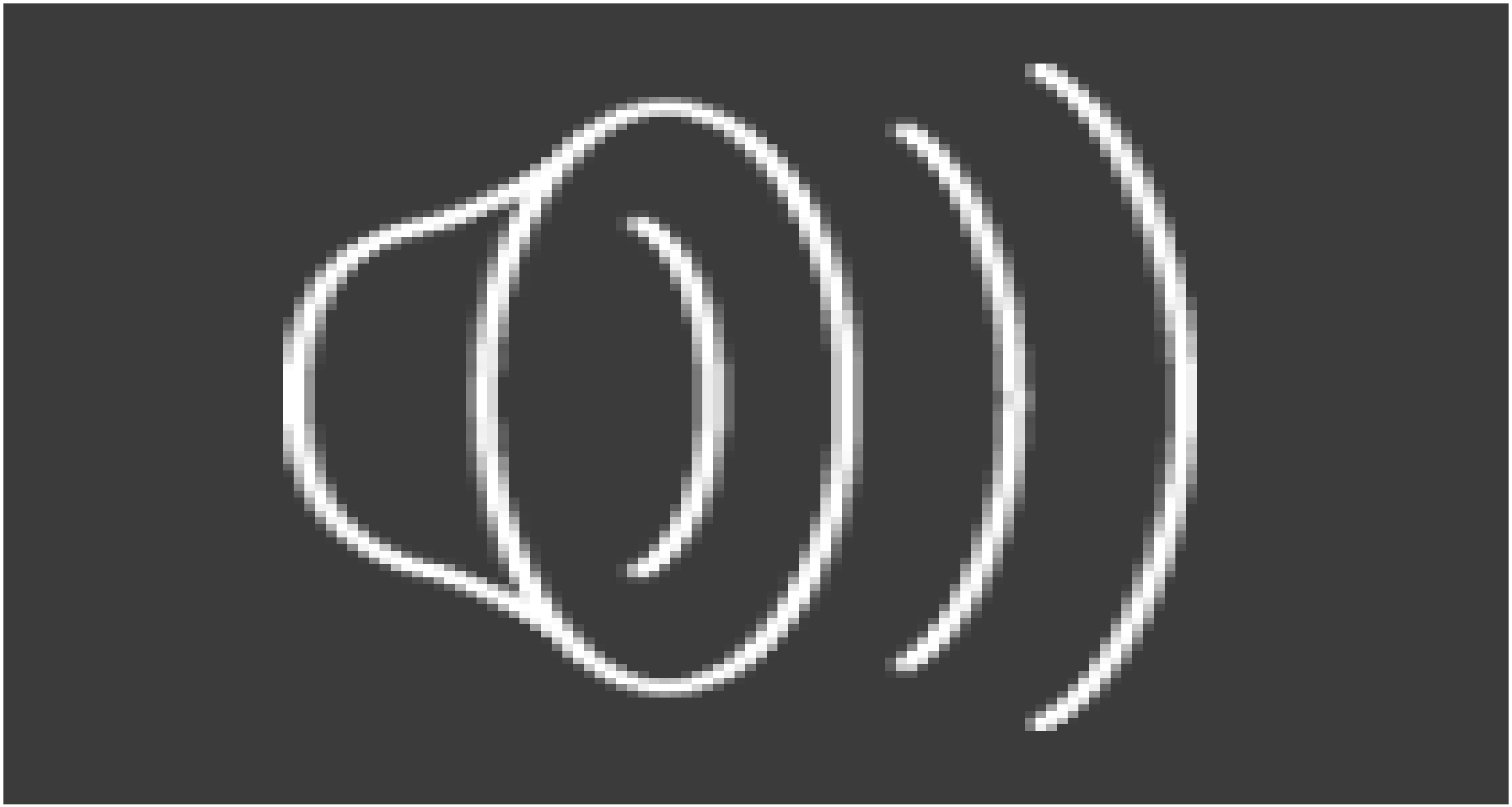


Origami et industrie spatiale



How NASA Engineers Use Origami To Design Future Spacecraft
https://www.youtube.com/watch?v=Ly3hMBD4h5E

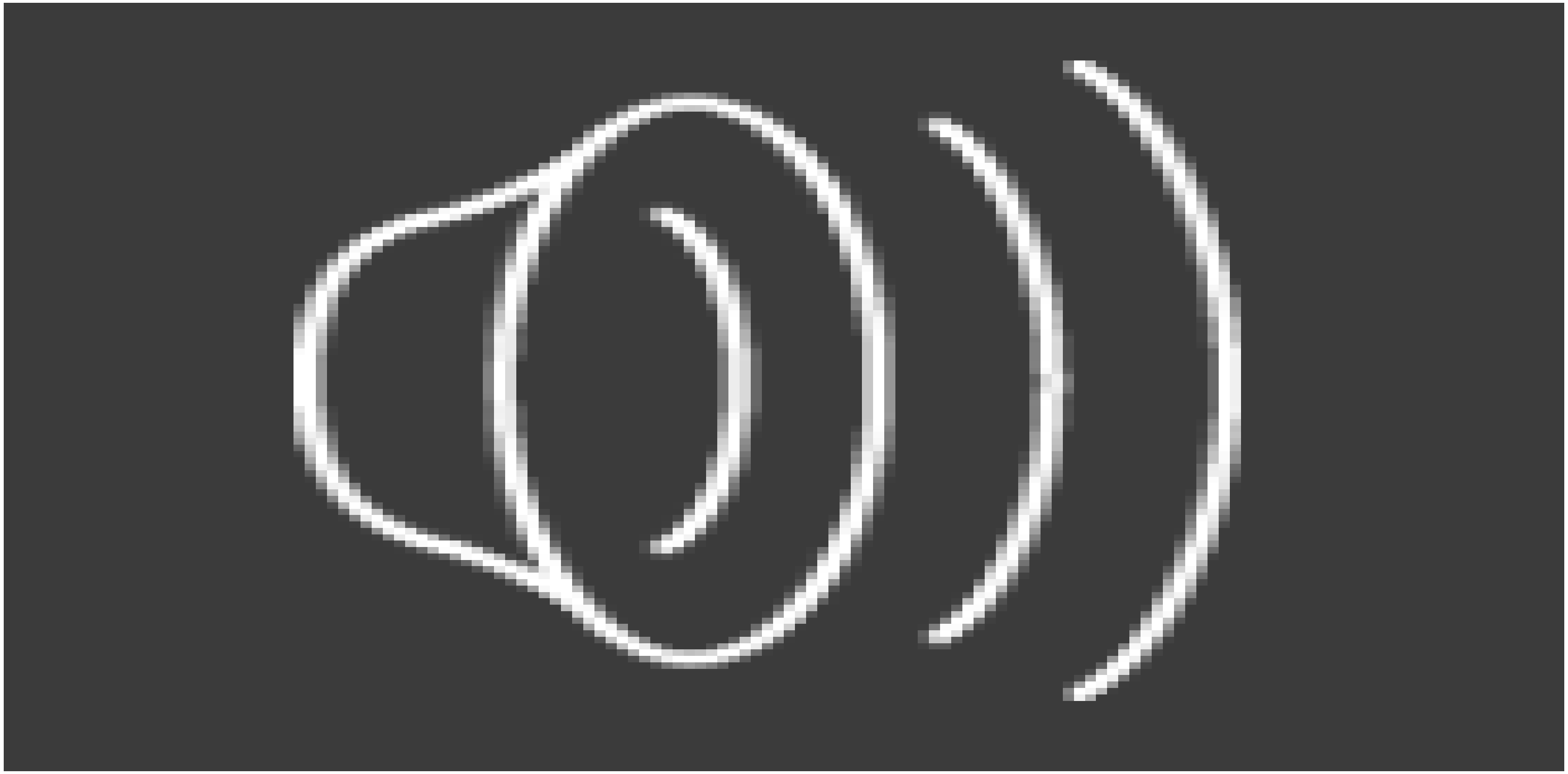
Micro robots er origami



Robot Origami: Robot self-folds, walks, and completes tasks

https://www.youtube.com/watch?v=ZVYz7g-qLjs

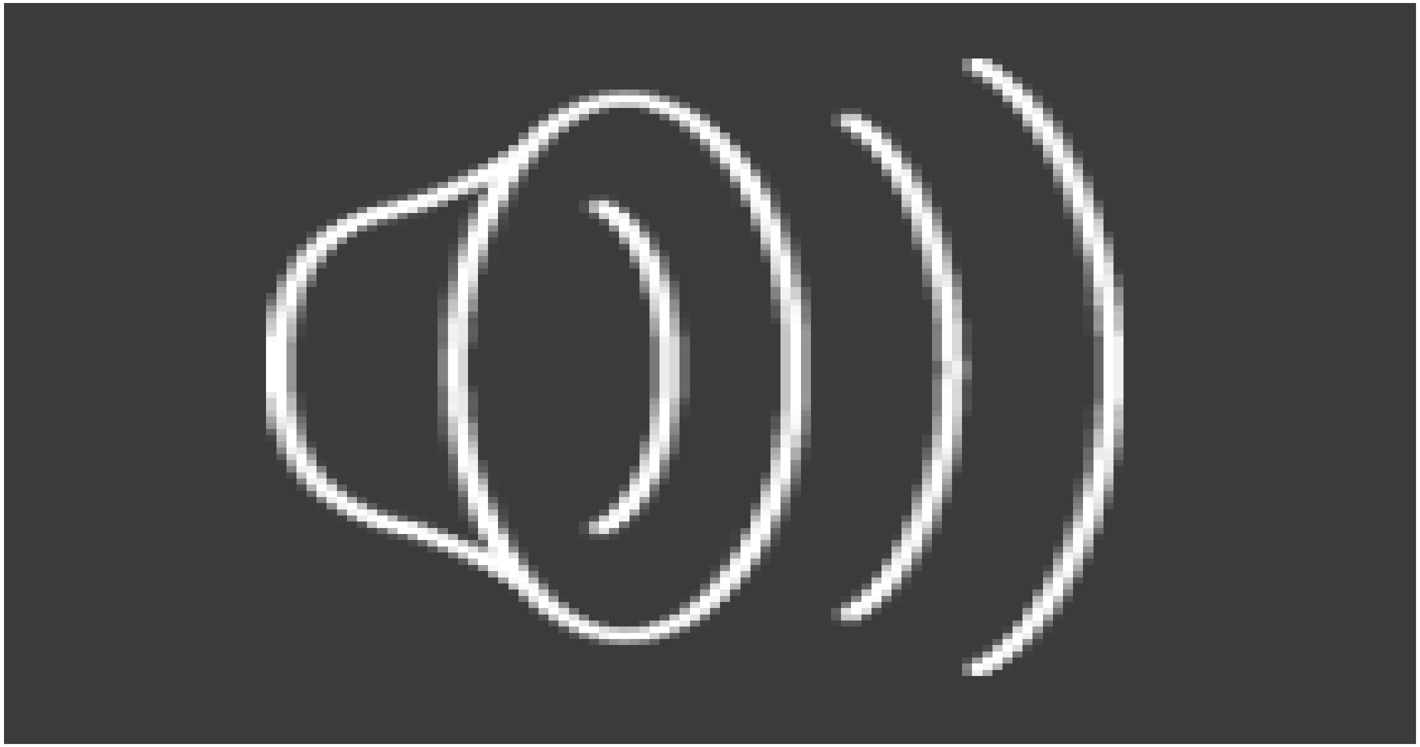
Origamis et médecine



Origami Inspires Tiny Medical Devices

https://www.youtube.com/watch?v=L_9BDZ6ZBwk

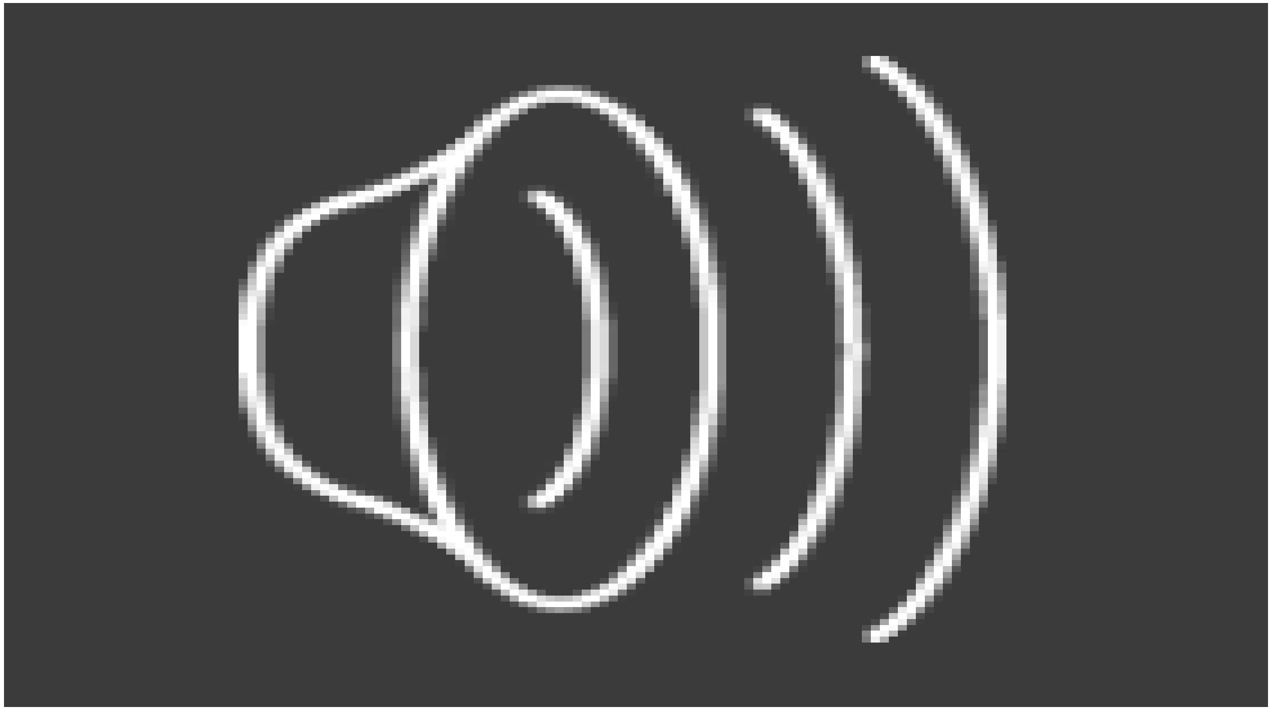
Propriétés mécaniques des origamis



Japan - New discoveries in paper folding

https://www.youtube.com/watch?v=Fz4Ioi1jFHY

Origamis de graphènes



Source : https://www.youtube.com/watch?v=oLCB55N7Yh8

Quelques références

Thomas Hull, *Origami, Activities for exploring mathematics*, CRC Press, 2013

Joseph O’Rourke, *How to fold it*, Cambridge University Press, 2011.

R. Lang, *Origami design secrets, Mathematical methods for an ancient art*, CRC Press, 2d Edition, 2012.

Erik D. Demaine et Joseph O'Rourke, *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*, Cambridge University Press, 2007.

La plupart des illustrations de cet exposé proviennent du livre de J. O’Rourke. On trouveras sur le site du livre beaucoup de supports, comme par exemple les figures et les canevas pour illustrer le « one cut theorem », i.e. la possibilité de découper un ensemble de formes polygonales après pliage en un seul coup de ciseaux.