Les découpages magiques de Harry Houdini

Jacky Cresson*et Laurene Hume†

Durée : 1h
Niveau : primaire et plus

Abstract

En 1922, Harry Houdini, célèbre magicien, publie un livre intitulé "Houdini's paper magic", qui contient des origamis et des découpages. L'une des activités présentées s'appelle "L'étoile à cinq branches" : le but est de découper une étoile à cinq branches dans une feuille de papier carrée en un seul coup de ciseaux ! Plus généralement, si je dessine une forme polygonale sur une feuille, est-il toujours possible de la découper en un seul coup de ciseaux ? La réponse est positive et concerne même toute famille finie de polygones disjoints sur une feuille. C'est le Fold and Cut theorem démontré en 1999 par Erik Demaine, Martin Demaine et Anna Lubiw.

Matériel

Feuilles blanches, feuille avec le dessin de l'étoile à 5 branches (et éventuellement feuilles avec d'autres polygones), crayons, règles, ciseaux, en nombre suffisant pour l'ensemble des participants.

Déroulement de l'activité

Pour aborder ce problème avec des élèves (de primaire et plus), on peut procéder de la manière suivante.

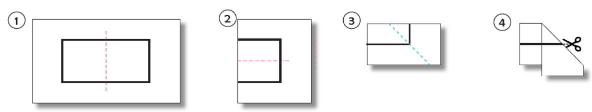
Étape 1 : Découpage d'un carré. On se donne un carré dessiné sur une feuille de papier. Comment le découper en un seul coup de ciseaux ? Intuitivement, on réalise qu'il va falloir plier la feuille, mais comment la plier ? Les élèves vont utiliser les symétries du carré: en pliant le long de la diagonale on obtient une superposition de deux côtés et on obtient donc un triangle rectangle qu'il suffit de plier encore une fois suivant la hauteur pour obtenir une superposition de tous les côtés. Si un élève arrive à faire ce pliage et obtenir une bonne découpe, il est intéressant de le faire verbaliser ce qu'il a fait afin d'expliquer aux autres les intuitions qu'il a utilisées. L'idée est d'arriver à formuler la procédure

*LMAP UMR CNRS 4152, Université de Pau et des Pays de l'Adour-E2S
†ITI IRMIA++, Université de Strasbourg

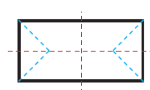
suivante : on essaie progressivement de réduire le nombre de côtés à découper par pliages successifs en faisant se superposer des côtés, jusqu'à ce qu'il en reste seulement un.

Étape 2 : Pliage d'un secteur angulaire. Une fois cette procédure explicitée, on peut se demander la chose suivante: si je trace un secteur dans le plan bordé par deux demi-droites, par quel pliage peut-on superposer ces deux lignes ? On doit considérer l'ensemble des points qui sont équidistants des deux demi-droites, c'est à dire la bissectrice du secteur angulaire. Suivant le niveau des élèves, on peut discuter de la construction effective de cette bissectrice, mais l'important est de comprendre que c'est cette idée qui permet de réduire le nombre de côtés.

Étape 3 : Découpage d'un rectangle. Considérons cette fois un rectangle dessiné sur la feuille. Le pliage peut se faire en deux étapes: l'utilisation d'une symétrie et ensuite d'une bissectrice.



Il est intéressant de redéplier le pliage une fois fait car on voit apparaître son canevas, c'est-à-dire les lignes de pli formées sur le papier.

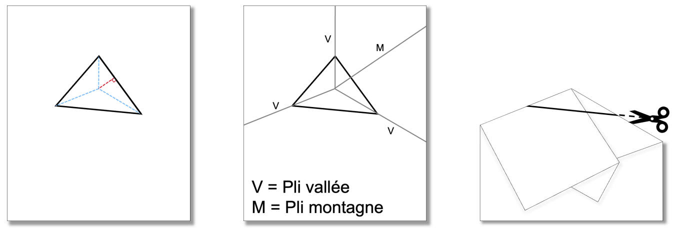


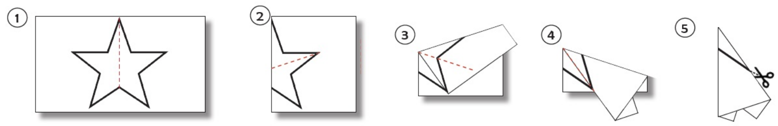
Sur ce canevas, on peut différencier les plis "vallée" (ceux qui forment un creux) et les plis "montagne" (ceux qui forment une crête). On peut faire quelques observations: en tous les sommets du canevas, le nombre total de plis est pair. Cela découle du théorème de Maekawa-Justin (1986-1987) qui dit que en chacun des sommets du canevas d'un pliage qui se met à plat, la différence entre le nombre de plis vallée et le nombre de plis montagne est toujours deux.

Étape 4 : Découpage d'un triangle. Continuons notre exploration du Fold and Cut theorem et considérons cette fois un triangle quelconque dessiné sur la feuille. Les bissectrices se coupent en un seul point et on peut plier les trois bissectrices afin de faire se superposer les côtés. On voit rapidement qu'il y a un problème dans le pliage car celui-ci ne se met pas à plat. C'est normal : il manque un pli par le théorème de Maekawa-Justin. On peut alors rajouter un pli orthogonalement à un des trois côtés pour superposer tous les côtés.

Étape 5 : Et l'étoile à 5 branches de Harry Houdini ? C'est finalement l'une des formes les plus simples ! Les 10 axes de symétries de l'étoile se confondent avec chacune des bissectrices en chaque sommet de l'étoile et se coupent en un point. Il suffit alors de 4 pliages successifs pour arriver à découper l'étoile en un seul coup de ciseau !

Étape 6 : Evidemment, vous pouvez lancer des défis comme celui de trouver un pliage pour découper chaque lettre de l'alphabet en les représentant sous une





forme polygonale. Il faut faire attention car la complexité des pliages peut vite devenir infernale. Au fil des formes, vous serez amené à résoudre plusieurs difficultés, qui toutes peuvent faire l'objet d'un algorithme. C'est la beauté du sujet : il ouvre toute une panoplie de problèmes que l'on peut aborder à pratiquement tous les âges.

References

[1] Harry Houdini, Houdini's paper magic: the whole art of performing with paper, including paper tearing, paper folding and paper puzzles, E. P. Dutton & company, New York (1922).

[2] Joseph O'Rourke, How To Fold It: The Mathematics of Linkages, Origami, and Polyhedra. Cambridge University Press, 177 pages (2011).