Sona, Nitus, Kolam et autres dessins sur le sable

Jacky Cresson

Université de Pau et des Pays de l'Adour
Laboratoire de Mathématiques et leurs applications
UMR CNRS 5142
pour le Mathematicum

Résumé : Une petite introduction aux dessins sur le sable de la famille des kôlam indien. On rappel l'ubiquité de ces motifs dans différentes civilisations et leurs usages. On se concentre ensuite sur la formation de kôlam dits complets à l'aide de courbes élémentaires permettant de faire des puzzle de kôlam. À l'aide de ces puzzle, on aborde plusieurs questions, notamment celle du tracé des courbes obtenues ainsi que la construction de kôlam possédant différents attributs (symétriques, récursifs, etc). Le coloriage des kôlam permet de mieux en apprécier la beauté et les symétries.

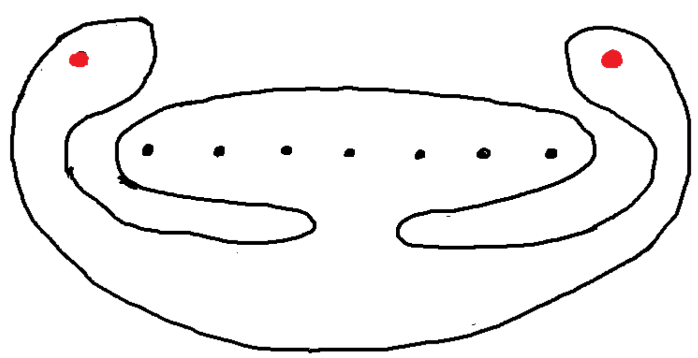
1. Des histoires, des dessins et des mathématiques…..

Commençons par une histoire...qui nous vient d'Afrique centrale….plus précisément des Tshokwe, une population que l'on retrouve principalement en République démocratique du Congo et qui est originaire d'Angola….là bas les histoires se racontent…..et elles se dessinent aussi. En voici une...

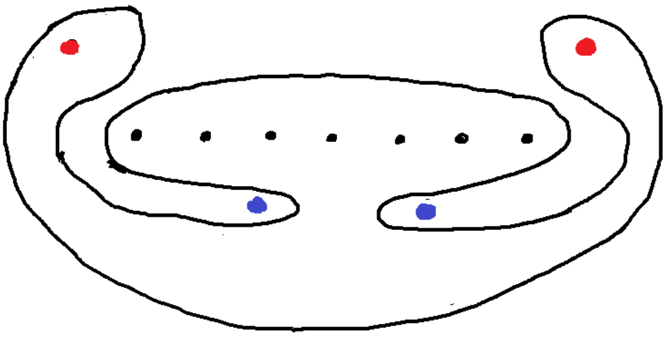
Il était une fois 7 jeunes garçons dont le rite de passage à l'âge adulte était venu ….

Ils étaient accompagnés par deux gardiens qui devaient prendre soin d'eux…

Ils étaient enfermé dans un camp où ils devaient apprendre les différentes rituels de la communauté….comme la fabrication de masque par exemple…..de ce camp, nul ne pouvait sortir…

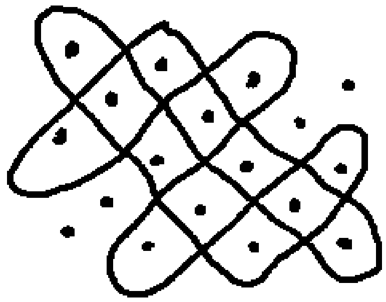


et nul ne pouvait entrer...



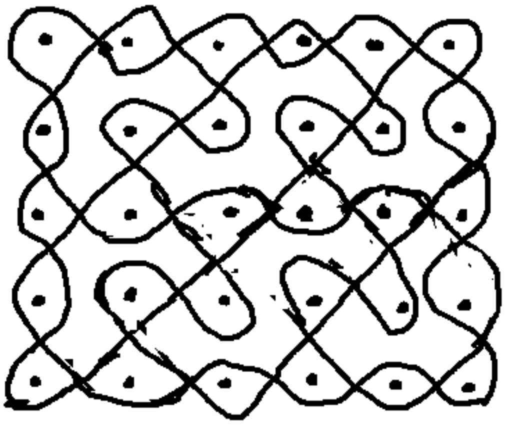
Ce dessin qui raconte une histoire s'appelle un **Sona** et l'histoire qu'il raconte est celui du mukanda, ce moment particulier du rite de passage des garçons à l'âge adulte…

Ce dessin est constitué d'une courbe et de points. Si l'on connaît bien la signification de certains de ces dessins, d'autres sont inconnus….c'est le cas de celui ci….

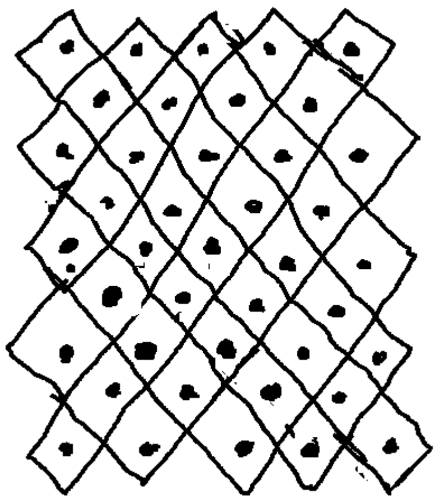


Souvent les points représente la position d'une personne et les lignes, des mouvements ou des frontières…..

Ce dessin par exemple représente les marques laissées par un poulet sur le sol quand on le poursuit….

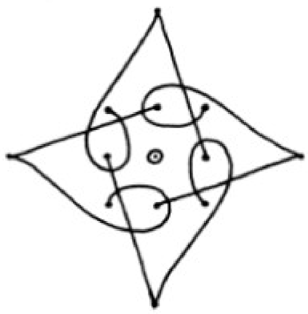


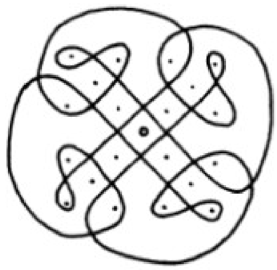
Alors que celui ci représente des esclaves capturés et entourés par les barrières du camp….



Chacun de ces dessins est fait de façon méthodique…..ils sont fait sur le sable ou utilisés comme motifs de décoration…..les enfants apprennent très tôt à les faire… et ses enfants aiment à lancer des défis aux visiteurs de passage…..comme celui de pouvoir tracer ces courbes sans lever une seule fois le doigt et sans passer deux fois sur une portion déjà dessinée...

Ce qui est fascinant est de retrouver ce type de motifs à différents endroits dans le monde avec des significations différentes mais tous avec certaines contraintes de fabrication. On retrouve ainsi des dessins analogues sur les îles du Vanuatu dans le sud du Pacifique où ils sont appelés **Nitus** comme ici….





Ou encore en Inde où ils portent le nom de **Kolam** qui veut dire ornement et qui sont exclusivement produits par des femmes. En voici quelques uns ….

Ces dessins ont fait l'objet de nombreuses études, notamment en mathématique et dans une discipline appelée ethnomathématique dont l'objet est de recenser la façon dont différentes cultures ont abordé la notion de nombre ou de forme par exemple. Nous renvoyons au livre de Marcia Ascher « Mathématiques d'ailleurs – Nombres, formes et jeux dans les sociétés traditionnelles » dont cette présentation est largement inspiré pour plus de précisions.

On peut aborder ces dessins en essayant de formuler leur construction en terme mathématique et en simplifiant la classe des dessins ainsi obtenus.

2. Le problème de la construction des kolams, des nitus ou des sonas….

De façon générale, on peut dire que ces dessins possèdent deux ingrédients :

- la donnée d'une famille finie de points
- une ou plusieurs courbes permettant d'enfermer ces points.

Pour avoir un objet plus simple, nous allons considérer la classe des dessins suivants :

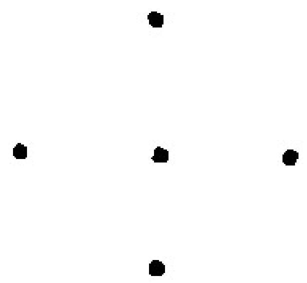
- on se donne un quadrillage de points.
- une courbe entoure chacun de ces points et peut être tracée en une seule fois sans repasser sur une portion de ligne déjà dessinée….

C'est cet apprentissage qui est fait par les petites filles en Inde ou par les jeunes garçons en Afrique….

Voilà nos premiers défis qui arrivent….

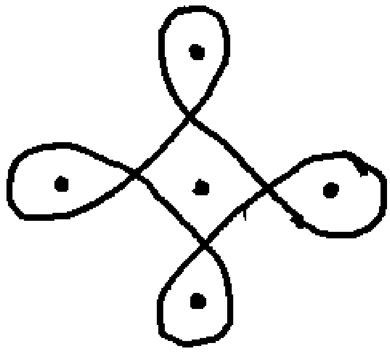
Défi 1

On se donne 5 points



Peux-tu dessiner une courbe en une seule fois qui entoure chacun de ces points ?

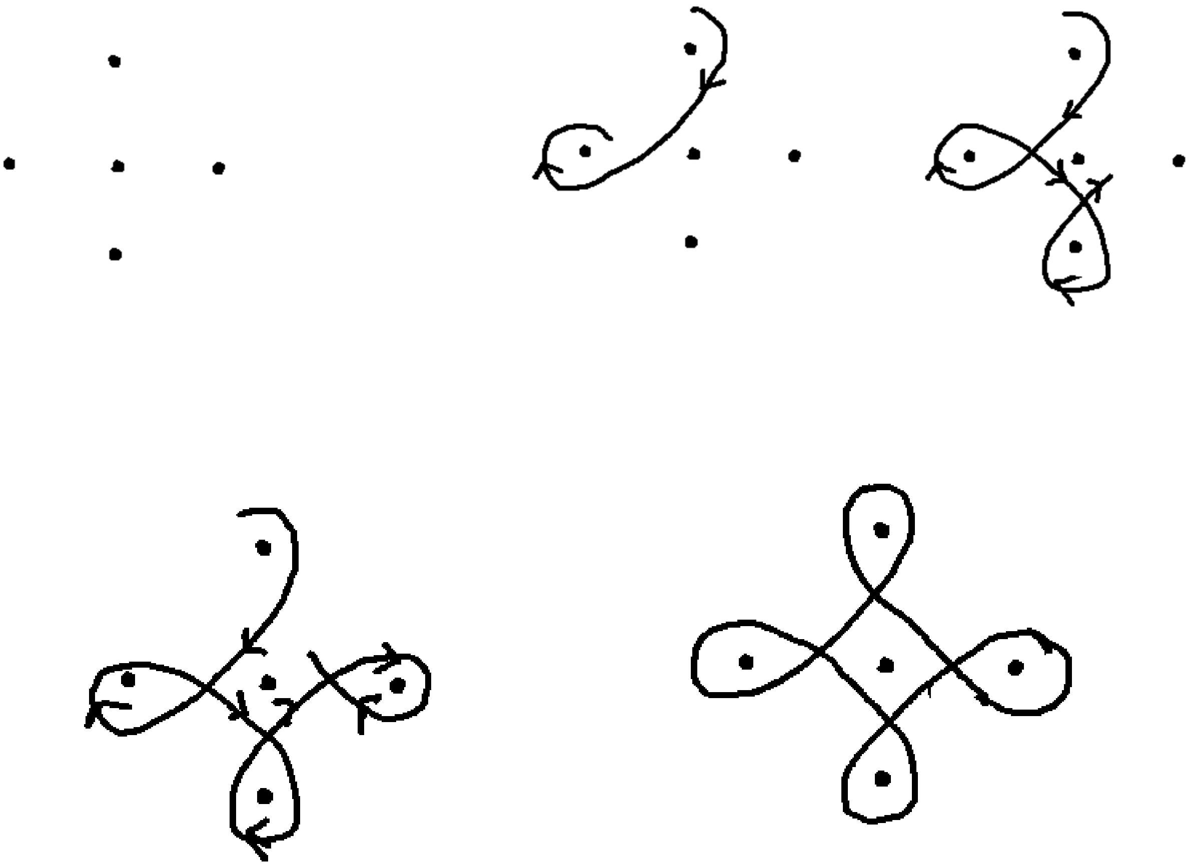
Voici la réponse



Défi 2

Peux tu faire ce dessin en une seule fois sans lever ton crayon et sans repasser sur une portion déjà dessinée ?

Voici une réponse…



Dans le défi précédent il y a en fait deux contraintes qui sont de nature différente :

- la première est d’entourer chacun des points avec une courbe.
- la seconde est celle de pouvoir réaliser cette courbe sans lever le doigt et sans repasser sur une portion dessinée.

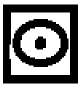
On va commencer par le problème de la réalisation de la courbe.

2.1. La construction des kôlam comme puzzle

Une manière de formaliser ce problème est d’utiliser un quadrillage dans lequel les points sont placés. Tous les dessins de Kôlam peuvent alors se réaliser à partir de courbes élémentaires entourant un point dans un carré, courbes que l’on assemble ensuite pour réaliser le kôlam.

On a 5 motifs de base :

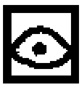
- le cercle isolé, entourant un point et ne permettant pas de continuer la courbe.

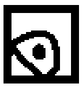


- la boucle, possédant un point de sortie

Les points de sortie pour continuer les courbes seront toujours situés sur le milieu des côtés et nous aurons donc au plus 4 sorties.

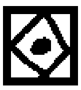
Pour deux sorties, nous avons deux motifs possibles :





Pour trois sorties nous avons le motif suivant :

et pour 4 sorties enfin celui-ci :

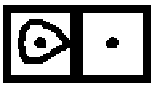


À l’aide de ces motifs, nous allons construire les kôlam. Pour cela la règle va être la suivante :

on se donne un assemblage de carrés. Pour un carré donné, on regarde le nombre de carrés qui l'entourent. On note sur les côtés du carré les milieux des côtés qui sont en contact. Ce seront les points de sortie.

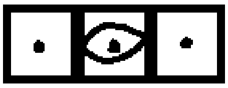
Si il n'y a aucun carré autour alors on entoure simplement le point.

Si il y a un carré accolé, alors on dispose la boucle avec la sortie correctement disposée.

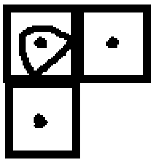


Si il y a deux carrés, on peut avoir deux dispositions possibles :

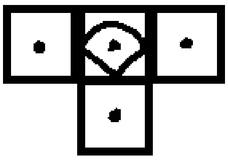
soit ils sont alignés et dans ce cas, c'est le motif de l'oeil



soit ils forment un virage et on doit donc utiliser le second motif

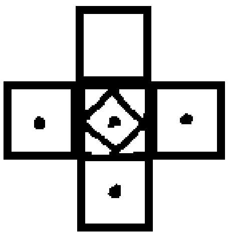


Si on a trois carrés, on a la disposition suivante

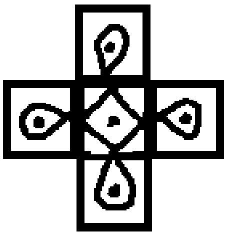


et on doit utiliser le motif à trois sorties correctement disposé.

Le cas le plus simple est évidemment celui où le carré est connecté à 4 carrés. Dans ce cas, on dispose le motif à quatre sorties.



De cette façon, on peut retrouver facilement le motif que nous avons cherché dans le défi 1.



Bien entendu, nous ne retrouvons pas tous les tracés de kôlam avec la règle précédente. On obtient les kôlam que j'appelle **complet** car toutes les sorties possibles d'un carré donné sont utilisées. Il y a dans ce cas une seule solution au problème de dessiner un kôlam. On renvoie au petit livre des kôlam pour avoir beaucoup de problèmes à étudier et au petit livre des solutions pour les réponses.

Si on affaibli cette condition de complétude alors on obtient des motifs beaucoup plus riches que nous regarderons plus tard.

2.2. Comment dessiner le kôlam en une seule fois….

La question précédente est loin d'être évidente mais on peut deviner la réponse en regardant la forme de la courbe dessinée. Si on peut la faire en ne levant pas le doigt et si la courbe est fermée, ce qui est le cas de tous les dessins que nous avons observés, on peut décomposer la courbe en :

- des points qui sont les endroits où la courbe se recoupe
- des courbes reliant chacun de ces points

En mathématique, ce type de courbe s'appelle un **graphe**, les points des **sommets** et les courbes reliant deux points des **arêtes**.

Le graphe est dit connexe si pour deux sommets quelconques du graphe il existe un parcours le long des arêtes reliant ces deux points.

La question précédente revient alors à se demander ***si il existe un chemin (parcours) du graphe qui passe par tous les sommets du graphe mais tel qu'on ne passe qu'une fois et une seulement fois sur chaque arête.***

Lorsqu'un tel chemin existe, on parle de **chemin Eulérien** en l'honneur du mathématicien **Leonard Euler** qui le premier en 1735 introduisit la notion de graphe et les questions relatives à ces objets. Le premier problème résolu via ces outils fut le problème dit des 7 ponts de Koenigsberg.

On aura besoin pour formuler le résultat obtenu par Euler de la notion de **degré d'un sommet :** ***le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes reliant ce sommet.***

Le théorème général permettant de répondre au problème de Koenigsberg est le suivant :

On se donne un graphe connexe. Si il existe un chemin Eulérien alors le degré de tous les sommets est pair sauf éventuellement deux.

La démonstration est assez simple. Si un chemin Eulérien existe, commençons par le parcourir. Chaque fois que nous passons par un sommet (sauf au début et à la fin), nous allons enlever l'arête d'arrivée et celle de départ. Autrement dit, on ne change pas la parité du degré du sommet par ce procédé. A la fin, toutes les arêtes ont disparu. Sauf pour le début et la fin, le nombre d'arêtes arrivant en un sommet est donc paire (sinon il resterait une arête qui ne pourrait pas être effacée par le procédé).

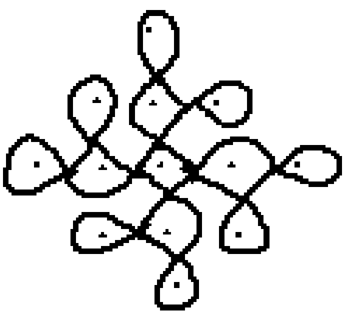
Ce théorème donne aussi une indication pour effectuer le parcours avec un crayon car on doit absolument commencer et terminer par les deux sommets de degré impair.

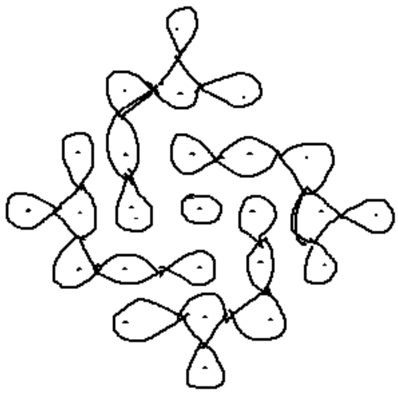
Si tous les sommets sont de degré pair alors on a un théorème plus fort : il existe un cycle eulérien, c'est à dire un chemin passant par toutes les arêtes une et une seule fois et revenant à son point de départ._

Ces théorèmes vous disent donc qu'il va toujours être possible de faire les dessins de Kôlam sans lever le doigt et sans repasser sur une portion déjà dessinée car tous les sommets sont de degré 4. Par contre ils ne disent pas comment le faire !

3. Les kôlam diamants

Nous avons regardé les kôlam que nous obtenons en prenant la plupart du temps un quadrillage. En fait, il existe une classe populaire de kôlam qui sont obtenus en considérant un assemblage que j'appelle en diamant. En voilà quelques exemples :



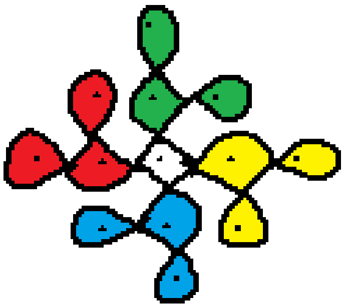


Là encore, on peut bien évidemment considérer les kôlam diamant complet ou incomplet, avec symétrie, etc. Les possibilités sont immenses.

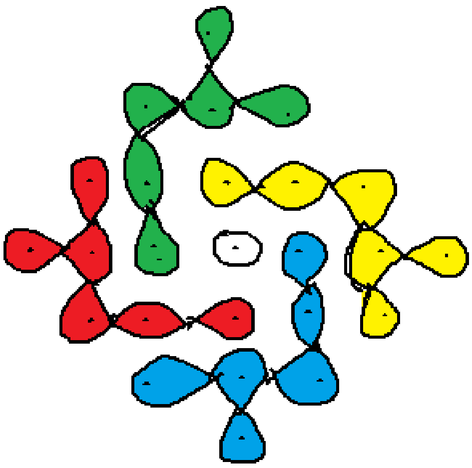
4. Les kôlam symétriques

Comme nous faisions remarquer dans la section 2.2, il est possible d'assouplir la condition de construction des kôlam en supposant que toutes les sorties d'un carré donné ne sont pas utilisées. Voyons un exemple d'un motif classique de kôlam :

On voit ici qu'un motif apparaît plusieurs fois. On peut remarquer que le kôlam reste inchangé si on fait tourner le carré de 90 degré. On dit qu'il est invariant sous une rotation d'angle 90 degrés. Cette invariance se traduit par une reproduction d'un des motifs (ici le motif vert, tourne de 90 degré pour arriver sur le motif jaune, etc). On peut le voir ici :

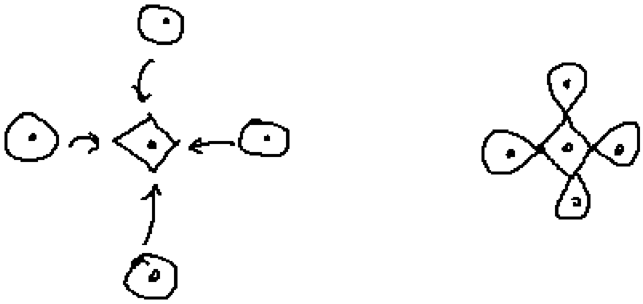


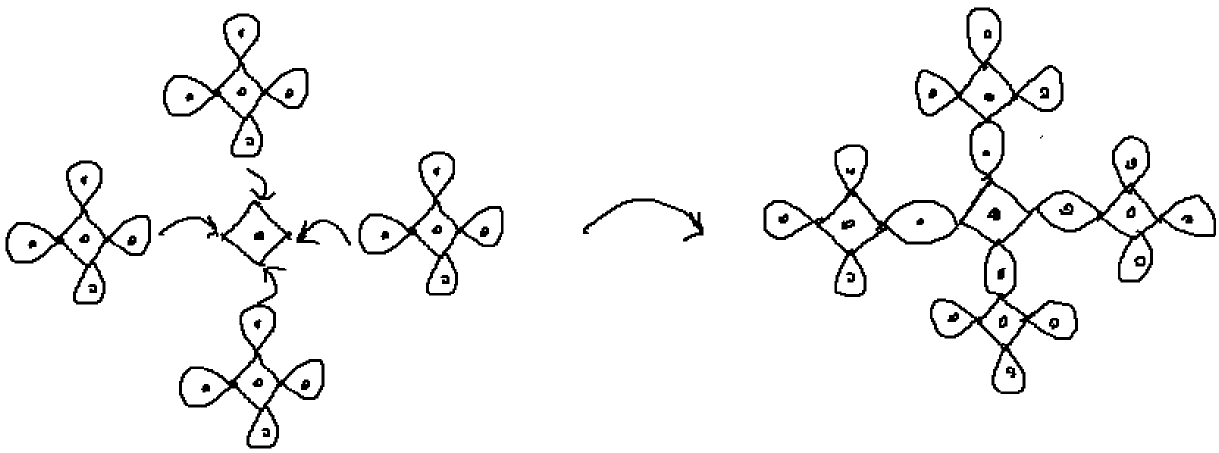
On peut généraliser cette idée en choisissant un motif que l'on va reproduire par rotation. En voici un autre :



5. Construction récursive de kôlam

On peut s'amuser aussi en construisant de manière récursive des kôlam de plus en plus grand. L'idée est de proposer une règle de construction de base qui forme un kôlam à partir d'un motif donné. Ce kôlam est alors utilisé dans la construction comme motif pour former un nouveau kôlam et ainsi de suite. Voici une procédure possible :

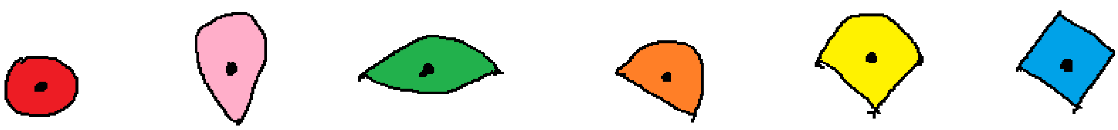




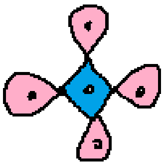
etc....

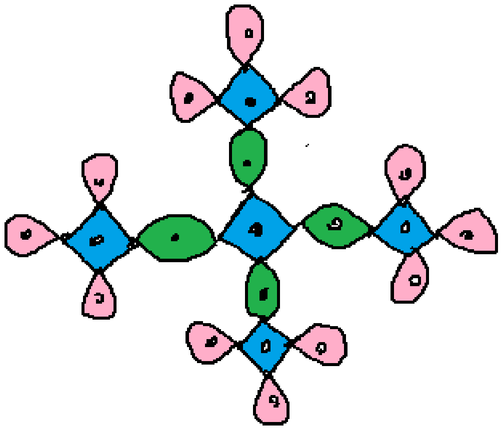
5. Faire des coloriage avec les Kôlam

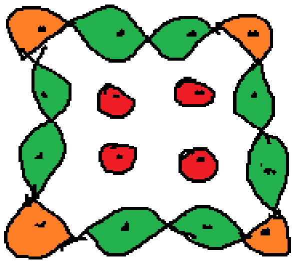
On peut réaliser de jolis coloriages en imposant des couleurs pour chaque tuile de Kôlam. Par exemple :

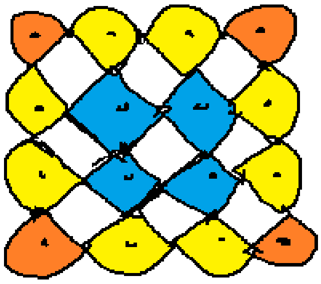


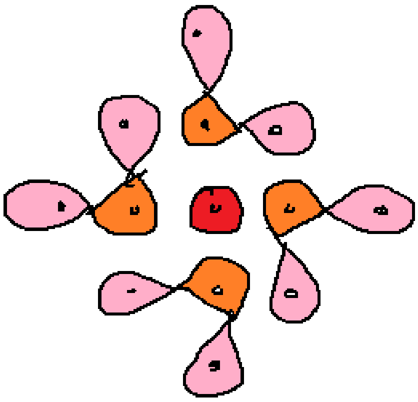
On voit ainsi mieux les symétries des figures.











On pourra colorier les kôlam complets du petit livre des kôlam une fois les dessins réalisés.

Références :

Le livre le plus connu sur l’éthnomathématique est celui de

Marcia Ascher, « Mathématiques d'ailleurs – Nombres, formes et jeux dans les sociétés traditionnelles »

On trouve aussi des références aux dessins sur le sable en Afrique dans le livre

P. Gerdes, Une tradition géométrique en Afrique, les dessins sur le sable, I, II & III, L'Harmattan, 1995.

Une autre approche des kôlam pour les lycéens est donnée dans le livre

Florence Messineo, Le monde fascinant des objets fractals, ed. Ellipses, 2015

en particulier les pages 227-235 concernant l'art des kôlam et la suite de Prouhet Thue Morse.

Il existe aussi une vaste littérature mathématique concernant les kolams et figures associées. On ne peut pas en faire le tour mais puisque le texte est en français et disponible sur internet, on renvoie notamment au travail de Jean-Paul Allouche et al.

Allouche, Gabrielle; Allouche, Jean-Paul; Shallit, Jeffrey. Kolam indiens, dessins sur le sable aux îles Vanuatu, courbe de Sierpinski et morphismes de monoïde. Annales de l'Institut Fourier, Tome 56 (2006) no. 7, pp. 2115-2130. doi : 10.5802/aif.2235.
https://aif.centre-mersenne.org/articles/10.5802/aif.2235/